



# Modélisation du comportement cyclique des ouvrages en terre intégrant des techniques de régularisation

Alexandre Foucault

## ► To cite this version:

Alexandre Foucault. Modélisation du comportement cyclique des ouvrages en terre intégrant des techniques de régularisation. Autre. Ecole Centrale Paris, 2010. Français. NNT : 2010ECAP0016 . tel-00534665

**HAL Id: tel-00534665**

**<https://theses.hal.science/tel-00534665>**

Submitted on 10 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET  
MANUFACTURES**

**« ÉCOLE CENTRALE PARIS »**

# **THÈSE**

présentée par  
**Alexandre FOUCAULT**

pour l'obtention du  
**GRADE DE DOCTEUR**

Spécialité : Mécanique

---

## **Modélisation du comportement cyclique des ouvrages en terre intégrant des techniques de régularisation**

---

Soutenue le 21 juin 2010 devant un jury composé de :

René CHAMBON	Président
Robert CHARLIER	Rapporteur
Philippe MESTAT	Rapporteur
Fernando LOPEZ-CABALLERO	Examineur
François VOLDOIRE	Examineur
Arézou MODARESSI FARAHMAND-RAZAVI	Directrice de thèse
Philippe KOLMAYER	Invité

Thèse préparée conjointement :

Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux, CNRS UMR 8579

Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables, UMR EDF/CNRS 2832

Département Analyses Mécaniques et Acoustique de l'EDF R&D

2010-ECAP0015



# Remerciements

Je profite de cette page pour marquer un point final à ce manuscrit et à ma vie d'étudiant, et par la même occasion remercier l'ensemble des personnes qui m'ont aidé, guidé et encouragé durant ces trois années de thèse.

Cette thèse CIFRE a été réalisée entre le Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux de l'Ecole Centrale Paris et le département d'Analyses Mécaniques et Acoustique de EDF R&D.

Je débute ces remerciements en exprimant ma gratitude à Claude Rospars, grâce à qui ce projet de thèse a pu voir le jour à la fin de l'été 2006. Merci de m'avoir contacté et offert l'opportunité de débiter cette très belle aventure humaine et scientifique.

De plus, je remercie vivement les deux personnes en charge de mon encadrement: Arézou Modaressi, directrice de thèse, et François Voldoire, encadrant industriel du département d'Analyses Mécaniques et Acoustique de EDF R&D. Merci pour la confiance que vous m'avez accordée, les échanges réguliers au cours de la thèse et les méthodes de travail inculquées. C'est en partie grâce à vous, vos conseils, votre soutien, enthousiasme et pédagogie si j'ai pu travailler dans un environnement serein pour mener à bien ce travail.

Mes sincères remerciements se dirigent à présent vers les membres du jury.

Ce fut pour moi un grand plaisir que René Chambon préside mon jury de thèse. Ses conseils et son intérêt au cours de ces années ont été des facteurs stimulants, enrichissants et constructifs pour l'avancement de mes travaux.

Je remercie aussi Messieurs Robert Charlier et Philippe Mestat d'avoir accepté de rapporter ce travail, de lire mon manuscrit en profondeur, de l'évaluer et de le corriger en partie. Leur avis scientifique et appréciations sur cette thèse m'encouragent à poursuivre mes activités au sein de la recherche scientifique.

Il m'a fait très plaisir de compter Philippe Kolmayer parmi les membres du jury. Ses conseils, sa vision des problèmes traités et son intérêt pour la science m'ont beaucoup apportés lors de nos discussions pour orienter mon travail vers les besoins du Centre d'Ingénierie Hydraulique de EDF.

Merci à Fernando Lopez-Caballero d'avoir accepté de participer à ce jury de thèse. J'ai beaucoup apprécié notre collaboration, ses conseils avisés lorsque je le sollicitais, sa disponibilité et son engagement pour m'aider à avancer.

Je remercie ensuite très chaleureusement tous les membres du Laboratoire MSSMat avec qui les contacts ont toujours été amicaux et sympathiques. Les bons moments partagés ont contribué grandement à cette ambiance générale des plus agréables. J'exprime ma gratitude particulière envers tous mes collègues doctorants, Cristian Nieto-Gamboa, Ghizlane Benosman, Esteban Saez, Tammam Hammad, Rachele Allena, Elsa Vennat, Sofia Costa d'Aguiar, Maryam Tabbakhha,



Ana Patricia Gaspar et Sahar Hemmati.

Mes pensées vont également à l'ensemble du personnel du département d'Analyses Mécaniques et Acoustique de EDF R&D pour m'avoir accueilli et permis de réaliser ce travail dans des conditions matérielles et humaines des plus appréciables. Je remercie notamment Vincent Guyonvarh pour son soutien et la confiance qu'il m'a accordée tout au long du projet. Également, une pensée particulière pour Marc Kham et Roméo Fernandes pour toute l'aide qu'ils ont su m'apporter durant la thèse. Je remercie aussi tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ce projet: Mickaël Abbas, Aimery Assire, Clément Chavant, Mathieu Courtois, Thomas De Soza, Georges Devesa, Christophe Durand, Joumana El-Gharib, Isabelle Fournier, Vincent Godard, Sylvie Granet, Nicolas Greffet, Patrick Massin, Jacques Pellet, Jean-Michel Proix... sans oublier les membres du LaMSID avec qui j'ai partagé plus que de simples cafés: Marion Allayrac, Ophélie Angélini, Jérôme Beaurain, Julien Berland, Daniele Colombo, Sam Cuvillier, Frédéric Daude, André Jaubert, Romain Lacombe et Mohamed Torkhani.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à tous les membres de ma famille, parents, « beaux-parents », frère, « beau-frère et belle-soeur », cousins pour m'avoir soutenu et épaulé durant ces années de thèse. Enfin, ma gratitude la plus grande se dirige vers Thaïs, ma future épouse, pour son soutien, sa compréhension, son aide et sa patience tout au long de ces années.

# Résumé

L'objectif technique majeur de cette thèse se rapporte au développement d'un outil de simulation numérique fiable et robuste adapté à la maîtrise et la connaissance du fonctionnement mécanique des ouvrages géotechniques. Cet outil de simulation doit notamment permettre une maîtrise des scénarii les plus pénalisants pour leur tenue, notamment sous l'aléa sismique.

La qualité des résultats d'un tel outil dans le cadre de la méthode des éléments finis est fonction du modèle de comportement utilisé, de la qualité de l'intégration du modèle et de sa résolution numérique. Dans le cadre de ce travail, le modèle élastoplastique de comportement cyclique des sols de l'ECP (dit de Hujeux) a été introduit dans Code\_Aster selon un schéma d'intégration implicite, permettant ainsi une représentation fine et précise des phénomènes mis en jeu durant l'aléa sismique. Ce modèle possède également l'avantage d'être adapté au comportement de différents types de sols dans le cadre des milieux poreux sous l'hypothèse des petites déformations. Après validation sur des chemins de chargement variés, le modèle est à présent utilisé pour la simulation de la construction par couches, de la mise en eau et de la tenue sismique de barrages en terre.

Le caractère non standard et adoucissant de ce modèle conduit à mettre en oeuvre des techniques de régularisation pour résoudre le problème de dépendance pathologique des résultats aux maillages lors de l'apparition de modes de ruine localisée. Le modèle de second gradient de dilatation est utilisé en complément au modèle de comportement de Hujeux pour contrôler la largeur des bandes de localisation apparaissant sur les structures étudiées. La prise en compte d'une cinématique enrichie permet de rendre objectives aux maillages les réponses des structures durant leur phase d'adoucissement mais n'instaure pas l'unicité des solutions aux problèmes posés suite aux instabilités. Dans le cadre d'essais biaxiaux drainés sur des matériaux dilatants exprimés au sein des milieux du second gradient de dilatation, il est apparu une dépendance de la largeur des bandes de cisaillement à l'état de contraintes initial en plus des propriétés des matériaux.

A partir d'un exemple analytique d'une bande de matériau cisailée, cette dépendance a pu être exprimée, comparée et maîtrisée en fonction des paramètres de régularisation par rapport aux résultats des simulations numériques. L'extension de cette approche à un cas de stabilité de pente sous chargement d'une fondation superficielle a ensuite été entrepris. La dépendance des largeurs de bandes à l'état de contraintes initial est apparue comme un élément clé de la maîtrise du couplage entre le modèle de second gradient de dilatation et les modèles de type Cam-Clay.

**Mots-clés :** Comportement cyclique des sols, schéma d'intégration implicite, milieu du second gradient de dilatation, essai biaxial drainé, stabilité de pente, digue en terre, modèle de Hujeux.

# Abstract

The main technical objective of this PhD thesis deals with the development of a soil behavior numerical tool. It should be robust, efficient and adapted to model the mechanical behavior of geotechnical structures (e.g. embankment dam) under the worst loading scenarios such as earthquakes.

In the finite element method, the quality of results is directly linked to the soil constitutive model, the integration scheme and the numerical resolution. In this PhD Thesis, the ECP elastoplastic soil model is introduced in Code\_Aster through an implicit scheme. An implicit scheme ensures to respect the theoretical formulation of the model. The ECP constitutive model is one of the models available in the literature to represent the behaviour of different kinds of soils under cyclic loadings and it is used since the 80's by hydraulic engineers at EDF. It is expressed in terms of effective stresses and infinitesimal strains. The developments are validated for laboratory tests in a large scale of loading paths. On the other hand, the study of a sand embankment was performed and compared to the results obtained with the finite element software GEFDyn developed at ECP.

The ECP model is based on a non-associated flow rule and it is able to reproduce a softening behavior. When shear bands occur in the structure, these properties lead to a pathological sensitivity of the results depending on the mesh size. Therefore, a regularization technique has to be used to circumvent this problem and to obtain objective results with respect to the mesh. The second gradient of dilation model is thus chosen to be coupled to the ECP model and in this way, to ensure a spatio-temporal independence of results. However, this mesh independence still evolves in a potential domain of solutions, when instability occurs. The simulations of drained biaxial tests on laboratory samples show a dependence of shear band thickness in regard to the initial stress state and material properties.

An analytical problem of a dilatant shear band is used to extract the key factors. These theoretical solutions are compared and validated to numerical responses, which are in good accordance. A bearing capacity problem was also solved to demonstrate the potential of the method. The conclusion of this work establishes the main role of initial stress state over the shear band thickness in the context of the second gradient of dilation model and the models based on Cam-Clay approach.

**Keywords :** soil cyclic behavior model, implicit scheme, second gradient of dilation model, drained biaxial test, bearing capacity, embankment, Hujeux model.

## Table des matières

1	Introduction.....	9
1.1	Le contexte industriel.....	9
1.2	Le projet scientifique.....	9
1.3	Le plan du mémoire.....	10
2	Modélisation du comportement des géomatériaux.....	13
2.1	Introduction.....	13
2.2	Élasticité.....	14
2.3	Élasto-plasticité.....	16
2.4	Autres approches.....	22
2.5	Revue de modèles existants.....	23
2.6	Intégration des modèles de comportement élastoplastique.....	34
2.7	Conclusion.....	38
3	Formulation théorique du modèle de Hujeux (1985).....	39
3.1	Relation de comportement de Hujeux.....	39
3.2	Définition des variables d'état et expression de l'énergie libre.....	41
3.3	Mécanismes élasto-plastiques déviatoires.....	44
3.4	Mécanismes isotropes.....	50
3.5	Traitement des états de traction.....	54
3.6	Paramètres élastoplastiques du modèle.....	54
4	Méthode d'intégration appliquée au modèle de Hujeux.....	57
4.1	Introduction.....	57
4.2	Intégration de l'équation constitutive non linéaire élastique.....	58
4.3	Intégration des équations constitutives élasto-plastiques.....	59
4.4	Tenseur élasto-plastique continu.....	75
4.5	Perspectives d'évolution.....	77
5	Validation numérique de l'implantation du modèle de Hujeux.....	79
5.1	Introduction.....	79
5.2	Modélisation d'une colonne 1D de sol bi-phasique saturé.....	81
5.3	Conclusion sur l'implantation du modèle de Hujeux.....	93
6	Stabilité et bifurcations rencontrées en mécanique des sols.....	95
6.1	Introduction.....	95
6.2	Équations du problème aux limites.....	97
6.3	Analyse globale de l'évolution du système mécanique.....	101
6.4	Unicité et stabilité des solutions au niveau local.....	102
6.5	Étude de la bifurcation en bandes localisées.....	106
6.6	Conclusion sur les critères de stabilité.....	112
6.7	Microstructure et localisation.....	112
6.8	Méthodes de régularisation.....	115
7	Application de la théorie du second gradient de dilatation .....	127
7.1	Introduction.....	127
7.2	Formulation théorique du modèle de second gradient.....	128
7.3	Formulation numérique.....	133
7.4	Couplage avec le modèle de Hujeux pour des matériaux dilatants.....	134
7.5	Étude numérique d'un essai biaxial drainé.....	139
7.6	Étude de stabilité d'un déblai.....	180
8	Conclusions générales et perspectives.....	191
9	Annexes.....	193
9.1	Relations entre les paramètres élastiques.....	195
9.2	Calcul analytique de la matrice tangente d'intégration locale .....	197
9.3	Essai cyclique induisant une rotation de l'état de contraintes.....	209

9.4 Essai biaxial drainé sur sable d'Hostun.....	213
9.5 Essai triaxial non drainé cyclique.....	223
9.6 Essai de cisaillement avec micro-décharges.....	235
9.7 Modélisation d'une digue en terre avec le modèle de Hujeux.....	239
9.8 Analyse des systèmes dynamiques.....	247
9.9 Perturbation de la suite des itérés de la méthode de Newton.....	255
9.10 Application du modèle de second gradient volumique à la dynamique.....	257
9.11 Tenseur élastoplastique du modèle Hujeux type Cam-Clay (HCC).....	267
9.12 Domaine des directions instables selon le critère de Rice.....	269
9.13 Simulation d'un essai biaxial drainé sur sable d'Hostun à DR=40%.....	271
9.14 Analyse de stabilité de pente avec la méthode des tranches de Bishop....	277
10 Bibliographie.....	279

# 1 Introduction

## 1.1 Le contexte industriel

Électricité de France, en tant qu'exploitant d'ouvrages hydrauliques, doit maîtriser la conception, l'expertise et la réévaluation de toutes les installations liées à la production hydraulique. Le projet, dans lequel s'inscrit ce travail de thèse, a pour objectif de mettre à disposition du Centre d'Ingénierie Hydraulique (CIH) un outil de simulation numérique adapté à la maîtrise et la connaissance qualitative et quantitative du fonctionnement mécanique des ouvrages géotechniques. Les outils de modélisation validés et calibrés sont devenus indispensables dans les dossiers de sûreté relatifs aux ouvrages dont EDF détient la concession. Ils permettent de maîtriser leur comportement sur les scénarios les plus pénalisants pour leur tenue. Une des finalités du projet consiste à établir une méthodologie de simulation, avec le Code\_Aster, en dynamique (solicitations sismiques) non linéaire sur des barrages en terre, après avoir modélisé leurs phases de construction et de mise en eau. Les modèles de comportement adaptés à une représentation fine des phénomènes mis en jeu localement dans les sols, notamment durant l'aléa sismique, sont décrits comme adoucissants (diminution des contraintes malgré une augmentation des déformations), c'est-à-dire capables de détecter les phénomènes de ruine de ces ouvrages. La prédiction et l'extension de ces modes de ruine au sein des structures étudiées supposent de détenir des méthodes numériques adaptées.

Le Code\_Aster est l'outil de simulation numérique développé par EDF pour répondre aux enjeux de sûreté dans le domaine de la mécanique. Ce logiciel Open Source a pour mission de capitaliser les travaux de recherche de EDF R&D en lien avec la mécanique et de fournir des méthodes d'analyse avancées en mécanique des solides et des structures, intégrant les couplages avec d'autres physiques (hydraulique, thermique, acoustique).

Le travail de recherche élaboré dans cette thèse est capitalisé dans Code\_Aster. Il s'inscrit principalement dans le domaine de la géotechnique et a comme objectif d'assurer une fiabilité et une robustesse des calculs réalisés sur les structures visées (barrages en terre).

## 1.2 Le projet scientifique

L'utilisation de modèles de comportement phénoménologique dans le contexte des milieux continus est une approche rationnelle pour la modélisation des ouvrages géotechniques. En effet, malgré l'augmentation croissante des moyens de calculs, la conduite d'études numériques intégrant la micromécanique des milieux poreux n'apparaît pas encore adaptée à l'échelle des ouvrages. Dans le contexte de cette approche, la qualité des résultats sera toujours fonction du modèle de comportement utilisé, mais également de la qualité de son intégration et de sa résolution numérique. La qualité de l'intégration réside dans la robustesse des méthodes numériques, leur efficacité et leurs performances en temps de calcul.

Le modèle de comportement choisi est le modèle élasto-plastique multi-mécanismes de l'ECP dit de Hujeux. Le choix d'une intégration par schéma implicite garantit d'obtenir à convergence de la résolution des résultats en accord avec la

formulation théorique du modèle, qui constitue un des objectifs majeurs de cette thèse. Le modèle de Hujieux est un des modèles les plus performants, surtout pour la modélisation des chargements cycliques, disponibles à l'heure actuelle. Il offre, de plus, l'avantage de sa pratique dans l'ingénierie, qui a permis d'établir les paramètres du modèle pour de nombreux types de sols.

Ce modèle, comme précisé ci-dessus, est capable de représenter le comportement adoucissant du sol, dans un cadre non standard généralisé. Le système d'équations associées au problème continu à résoudre conduit à des instabilités favorisant l'apparition de zones à forts gradients de déformations, dont la largeur n'est pas maîtrisée. Numériquement, dans le cadre de la méthode des éléments finis (Batoz et Dhett (1990), Zienkiewicz et al. (2005)), une dépendance pathologique des résultats aux maillages est constatée en fonction de la forme des éléments, la discrétisation spatiale ou encore l'orientation des mailles pour ce type de modèles de comportement. Les zones de localisation de déformation se concentrent alors nécessairement sur une bande d'une épaisseur d'un élément. Ce phénomène conduit, pour un raffinement spatial de plus en plus fin, à un mode de ruine ne dissipant pas d'énergie, ce qui n'est pas réaliste.

Des méthodes numériques dites de régularisation existent pour corriger ces phénomènes. Le second objectif de cette thèse consiste ainsi à réaliser l'introduction du modèle de Hujieux au sein d'une cinématique de milieu continu enrichie par le second gradient de dilatation (Fernandes (2008, 2009a)). Les résultats attendus de ce couplage sont d'obtenir des résultats indépendants au maillage à convergence, tant pour des essais biaxiaux drainés, que pour des études d'ouvrages géotechniques, telle qu'une étude de stabilité de pente sous chargement d'une fondation superficielle.

### 1.3 Le plan du mémoire

La première partie de ce mémoire regroupe les quatre premiers chapitres du document. Le premier chapitre propose d'abord un rappel de définitions sur la construction des modèles élasto-plastiques pour ensuite présenter une bibliographie non exhaustive de modèles phénoménologiques représentatifs du comportement des sols. En fin de ce premier chapitre, les différentes méthodes d'intégration numériques disponibles dans la littérature sont également présentées.

Le second et le troisième chapitres s'attachent à décrire de manière exhaustive le modèle élastoplastique de Hujieux et le schéma d'intégration implicite adopté pour l'implantation du modèle dans le Code\_Aster (notamment la gestion des mécanismes). Le quatrième chapitre a pour objet de présenter les résultats obtenus avec le schéma d'intégration implicite en comparaison d'un schéma explicite avec sous-incrémentation pour des trajets variés de chargement homogène. En fin de chapitre, l'étude en poro-mécanique de la construction par couches d'une colonne de sol et de sa réponse sous un chargement sismique est présentée dans le but d'évaluer les capacités du schéma d'intégration implicite sur une structure géotechnique classique. En annexe, se situent également les résultats d'études réalisées avec le modèle de Hujieux sous Code\_Aster pour simuler la construction, la mise en eau et un chargement sismique d'une digue en terre homogène.

La deuxième partie de ce mémoire traite des difficultés apparaissant lors de la résolution des équations du problème mécanique étudié. Les points soulevés

abordent les notions de stabilité des ouvrages géotechniques, tels que les barrages en terre, dont les résultats sont présentés en annexe 9.7 . L'analyse de la tenue mécanique de ces ouvrages peut se ramener à l'étude de stabilité de pente ou à la détection des modes de rupture potentiels. Ils correspondent à de fortes discontinuités au sein du milieu, produisant alors des glissements de terrain de grande ampleur pilotés par des bandes de cisaillement très fines en comparaison des dimensions des structures étudiées.

Le chapitre 6 présente des éléments d'analyse de la stabilité des solutions des problèmes aux limites rencontrés en mécanique des sols. Sous une vision synthétique et restreinte aux petites déformations, les outils mathématiques permettant de caractériser les phénomènes mis en jeu localement et globalement à l'échelle des structures géotechniques sont introduits. Ce chapitre permet de justifier le choix des critères d'apparition d'instabilités utilisés par la suite dans le cadre des études. Lorsque le système d'équations associé au problème aux limites étudié devient mal posé, un mode de rupture localisé peut apparaître impliquant pour le modèle numérique une incapacité à préciser la largeur de la zone à forts cisaillements. Différentes approches théoriques ou numériques permettant de pallier ces difficultés sont alors présentées en fin de chapitre, ce qui conduit à justifier la formulation choisie dans ce travail.

Le chapitre 7 présente tout d'abord la théorie des milieux de second gradient de dilatation développé par Fernandes (2009a), étendue aux équations de la dynamique pour quantifier son effet sur la propagation des ondes dans le milieu. Ensuite des applications numériques avec le modèle de Hujeux enrichi par cette cinématique sont présentées. Les objectifs consistent dans un premier temps à évaluer la capacité de cette approche à fournir des résultats objectifs par rapport à la discrétisation spatiale, puis caractériser la valeur des paramètres supplémentaires introduits, et finalement quantifier en temps CPU la prise en compte de cette approche.

Après les conclusions et perspectives présentées au chapitre 8 , différents aspects techniques sont documentés en Annexes (§9 ).





## 2 Modélisation du comportement des géomatériaux

2 Modélisation du comportement des géomatériaux.....	13
2.1 Introduction.....	13
2.2 Élasticité.....	14
2.2.1 Élasticité linéaire isotrope de Hooke.....	14
2.2.2 Élasticité non linéaire.....	15
2.3 Élasto-plasticité.....	16
2.3.1 Partition des déformations et relation incrémentale hypoélastique.....	17
2.3.2 Surface de charge et domaine d'élasticité.....	17
2.3.3 Écrouissage.....	18
2.3.4 Règle d'écoulement plastique.....	19
2.3.5 Relations incrémentales avec seuil plastique unique.....	19
2.3.6 Relations incrémentales pour l'élasto-plasticité à potentiels multiples.....	20
2.4 Autres approches.....	22
2.4.1 Hypoplasticité.....	22
2.4.2 Théorie de la plasticité généralisée.....	22
2.5 Revue de modèles existants.....	23
2.5.1 Modélisation du comportement des sols granulaires.....	23
2.5.1.1 Résultats expérimentaux.....	23
2.5.1.2 Modèles de comportement.....	25
2.5.2 Modélisation du comportement des argiles.....	26
2.5.2.1 Résultats expérimentaux.....	26
2.5.2.2 État limite en compression isotrope.....	27
2.5.2.3 État critique en compression triaxiale.....	28
2.5.2.4 Modèles Cam-Clay et Cam-Clay modifiés.....	28
2.5.2.5 Limitations des modèles de type Cam-Clay.....	30
2.5.2.5.1 Anisotropie des argiles naturelles.....	30
2.5.2.5.2 Comportement des argiles sous sollicitations cycliques.....	30
2.5.3 Modèles de comportement unifiés.....	31
2.5.3.1 Modèles à surface limite.....	32
2.5.3.2 Modèle de Hujeux (1985).....	33
2.6 Intégration des modèles de comportement élastoplastique.....	34
2.7 Conclusion.....	38

### 2.1 Introduction

L'un des objectifs majeurs de ce travail de thèse repose sur l'utilisation d'un modèle de comportement des sols, adapté à la modélisation de digues en terre pour les différentes phases de la vie de ces ouvrages, telles que leur construction, leur mise en eau et leur résistance à l'aléa sismique.

Les modèles de comportement dits unifiés permettent de traiter le comportement des sables et des argiles dans le même cadre, pour des états lâches et denses des sols. Ces modèles apparaissent donc particulièrement bien adaptés aux problèmes de remblais sur sol compressible, systèmes associant argiles ou limons et sol granulaire. L'intérêt réside dans le fait qu'un unique modèle de comportement peut être utilisé pour modéliser ces différents types de matériau.

Pour décrire ces modèles, il est nécessaire de travailler, en particulier, dans le cadre

des milieux poreux saturés et de présenter la théorie de l'élasto-plasticité.

Ce chapitre s'inspire des différents travaux bibliographiques de Mestat (2002), Cambou et Hicher (2002), Hau (2003), Coquillay (2005), Jenck (2005) et Prunier (2008).

Un sol naturel saturé est un milieu poreux constitué de deux phases : la phase solide et la phase liquide. Le principe des contraintes effectives de Terzaghi permet une description satisfaisante de l'interaction entre les phases. Cette description s'appuie sur la loi de Darcy pour l'écoulement du fluide, sur les équations de conservation des masses fluides, de l'équilibre mécanique du milieu poreux et sur le modèle de comportement de la partie solide reliant le tenseur des contraintes effectives à ses déformations.

Le modèle de comportement d'un matériau est la relation fonctionnelle qui relie les efforts intérieurs aux grandeurs cinématiques décrivant les déformations de ce milieu. La forme générale de la relation fonctionnelle est donnée par l'équation suivante :

$$\sigma_{ij} = F(\epsilon_{ij}) \quad (2.1)$$

où  $\epsilon_{ij}$  désigne les composantes du tenseur des déformations,  $\sigma_{ij}$  celles du tenseur des contraintes et  $F$  la fonctionnelle.

Il existe en géomécanique un grand nombre de modèles de comportement plus ou moins complexes. La complexité des modèles dépend de la finesse de description des phénomènes naturels observés et de l'objectif poursuivi dans l'analyse. Les modèles simplifiés se limitent à représenter globalement le comportement des structures géotechniques, tandis que les modèles plus évolués permettent de mener des analyses locales plus avancées du comportement des sols.

## 2.2 Élasticité

Un comportement élastique d'un matériau implique la réversibilité des déformations du milieu. Les déformations peuvent alors être reliées aux contraintes par une relation fonctionnelle linéaire ou non linéaire.

### 2.2.1 Élasticité linéaire isotrope de Hooke

Dans le cas d'un comportement élastique linéaire isotrope, le tenseur des déformations est relié au tenseur des contraintes via la relation de Hooke, en composantes dans un repère cartésien :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{kk} - \sigma_{kk}^0) \delta_{ij} \quad (2.2)$$

avec  $\sigma_{ij}^0$  l'état de contraintes initial du sol assurant l'équilibre mécanique pour les sols naturels au repos.

Et la relation inverse :

$$\left(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0\right) = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{ij} - \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.3)$$

avec

- $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker,
- $E$  le module d'Young,
- $\nu$  le coefficient de Poisson.

$E$  et  $\nu$  sont les deux paramètres de l'élasticité isotrope, qui peuvent être substitués par le module de compressibilité  $K$  et le module de cisaillement  $G$  par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ K &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Le modèle élastique linéaire isotrope est peu utilisé pour décrire le comportement des sols, car il ne peut ni décrire l'irréversibilité du comportement, ni sa dépendance au chemin de chargement subi.

## 2.2.2 Élasticité non linéaire

L'approche élastique non-linéaire permet de tenir compte de la non linéarité réversible du comportement des sols à de très faibles niveaux de déformations. Elle permet, par exemple, de décrire la dépendance du comportement à l'état de contraintes ou de déformations.

Les modèles hyperélastiques constituent la première catégorie des modèles élastiques non linéaires. Un modèle est dit hyperélastique si la dissipation intrinsèque est toujours identiquement nulle (inégalité de Clausius-Duhem). Les contraintes s'exerçant sur le matériau découlent d'un potentiel d'énergie libre  $W$  de Helmholtz telle que :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\epsilon_{kl})}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (2.5)$$

Dans ces conditions, le tenseur  $A$  liant les incréments de contraintes aux incréments de déformations vérifie la symétrie majeure en plus des symétries mineures. En utilisant les notations suivantes :

$$d\sigma_{ij} = A_{ijkl} d\epsilon_{kl} \quad (2.6)$$

cela signifie que  $A_{ijkl} = A_{klij}$ . Les symétries mineures sont assurées par la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformations.

Les modèles hypoélastiques constituent la seconde classe de modèles de comportement non linéaires. Ils ne dérivent plus d'un potentiel thermodynamique et sont généralement issus de formulations empiriques. Des dissipations internes d'énergie se produisent au cours des cycles de charges/décharges. Ils permettent de traiter des grandes déformations (Simo et Hughes (2000)) en introduisant des déformations irréversibles et une relation incrémentale entre les taux de contraintes et les taux de déformations élastiques. Ces modèles sont surtout utilisés en complément d'une loi d'évolution portant sur les déformations plastiques du milieu (§2.3).

Pour une revue plus complète de ces modèles, on peut se référer au travail bibliographique de Lee (1994) cité par Coquillay (2005).

Ces modèles n'ont pas la prétention de représenter le comportement réel des sols mais sont utilisés comme base de départ pour les modèles élasto-plastiques présentés au paragraphe 2.3.

## 2.3 Élasto-plasticité

La formulation classique du comportement élasto-plastique d'un milieu continu se place dans l'hypothèse de la transformation infinitésimale. Ces modèles de comportement écartent tout effet de vieillissement du matériau et de viscosité.

Les modèles élasto-plastiques permettent de décrire un comportement non linéaire avec une déformation irréversible des matériaux. Le schéma des modèles élasto-plastiques intègre l'existence d'un palier d'écoulement sur la courbe contrainte-déformation et de déformations irréversibles. Cette application permet de décrire de façon relativement satisfaisante les principaux aspects du comportement mécanique des sols saturés, en conservant néanmoins un domaine de réversibilité. Par ailleurs, ce schéma est bien adapté à une implantation dans les logiciels de calcul par éléments finis.

Le temps physique n'est pas supposé intervenir (pas d'effet de vitesse).

Cette section vise à présenter les notions fondamentales de la théorie de l'élasto-plasticité, qui sont, pour un modèle élasto-plastique à un seul mécanisme :

- la partition des déformations, qui décompose le tenseur des déformations totales en la somme du tenseur des déformations élastiques et du tenseur des déformations plastiques ;
- la surface de charge, qui définit le seuil de contrainte au delà duquel le comportement d'un matériau est irréversible ;
- le domaine d'élasticité, qui correspond à l'intérieur de la surface de charge et dans lequel les déformations sont réversibles ;
- le choix des variables internes décrivant la mémorisation de l'histoire des états du matériau (écrouissage, déformations plastiques) ;
- l'écrouissage, qui permet de faire évoluer la surface de charge dans l'espace des contraintes en fonction de l'intensité des sollicitations. Dans ce cas, le domaine d'élasticité varie également ;
- la règle d'écoulement plastique, qui décrit la manière dont évoluent les déformations plastiques et les autres variables internes ;

- le critère de plasticité parfaite, qui caractérise la rupture du matériau. Lorsque le seuil de contrainte n'évolue pas, ce critère est confondu avec la surface de charge.

### 2.3.1 Partition des déformations et relation incrémentale hypoélastique

La plasticité se caractérise par la présence de déformations irréversibles au déchargement. Les déformations se décomposent en une partie élastique et une partie plastique. La partition des taux de déformations donne la relation suivante :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (2.7)$$

Les taux de déformation élastique  $\dot{\epsilon}_{ij}^e$  et de contrainte  $\dot{\sigma}_{ij}$  sont liés par l'intermédiaire du tenseur d'élasticité  $A_{ijkl}$  :

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e \quad (2.8)$$

avec

- $\dot{\epsilon}_{ij}^e$  le taux de déformation élastique,
- $\dot{\epsilon}_{ij}^p$  le taux de déformation plastique.

### 2.3.2 Surface de charge et domaine d'élasticité

Le deuxième concept fondamental est celui de domaine d'élasticité. Le domaine initial d'élasticité définit l'ensemble des trajets de chargement le long desquels le comportement du matériau est continuellement élastique. Lorsque le trajet de chargement sort de ce domaine, un phénomène physique supplémentaire se superpose à celui de la déformation élastique. Ce phénomène, qui correspond à la déformation plastique, est irréversible.

Le domaine d'élasticité est donc défini par une fonction scalaire  $f$  du tenseur de contrainte  $\sigma_{ij}$ , appelée fonction de charge du matériau et telle que :

- $f(\sigma_{ij}) < 0$  correspond à l'intérieur du domaine ;
- $f(\sigma_{ij}) = 0$  correspond à la frontière du domaine. Des déformations plastiques peuvent avoir lieu, à condition que  $\frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0$ , correspondant au cas dit de chargement, avec  $\dot{\sigma}_{ij}$  le taux de contraintes ;
- $f(\sigma_{ij}) > 0$  correspond à l'extérieur du domaine. Cette partie du domaine est impossible à atteindre.

La condition  $f(\sigma_{ij}) < 0$  est nommée critère d'élasticité et la condition  $f(\sigma_{ij}) = 0$  est nommée critère de plasticité.  $f$  doit être une fonction convexe.

La surface de charge peut dépendre de l'état de contrainte seul : il s'agit alors du cas particulier de la plasticité parfaite. Elle peut également dépendre du trajet de

déformation plastique ou d'une autre variable interne : il s'agit alors d'un modèle élasto-plastique avec écrouissage.

Pour le matériau écrouissable, le domaine d'élasticité actuel dépend de l'état d'écrouissage, représenté par un ensemble de variables  $k$  introduites dans l'expression de la surface de charge. La surface de charge est alors notée  $f(\sigma_{ij}, k) = 0$ . Les évolutions de l'état d'écrouissage sont conditionnées par celles des déformations plastiques.

### 2.3.3 Écrouissage

Les changements de forme et de taille des surfaces de charge sont contrôlés par les lois d'évolution des variables d'écrouissage. Les différents types d'écrouissage peuvent être généralement séparés suivant un écrouissage isotrope ou un écrouissage cinématique.

L'écrouissage isotrope contrôle la taille de la surface de charge par l'intermédiaire d'une variable scalaire. Généralement, pour les modèles relatifs au comportement des géomatériaux, cet écrouissage porte sur l'angle de frottement de Coulomb mobilisé ou sur la pression critique de confinement (notions définies au §2.5).

Les écrouissages non isotropes peuvent modifier la surface de charge en lui appliquant une rotation, une translation cinématique ou une distorsion. L'écrouissage cinématique par rotation, introduit par une variable tensorielle d'ordre 2, contrôle la rotation de la surface de charge autour d'un point fixe de cette surface. L'écrouissage cinématique par translation, introduit par une variable tensorielle du second ordre, permet la translation de la surface de charge, très utilisée pour modéliser le comportement cyclique des sols. L'écrouissage par distorsion contrôle la forme de la surface de charge en introduisant une variable tensorielle d'ordre 4.

La figure 2.1 présente l'ensemble des écrouissages cinématiques couramment utilisés dans la littérature. L'axe des abscisses représente la pression isotrope de confinement  $p$  ( $p = \frac{\sigma_{ij} \delta_{ij}}{3}$ ) et l'axe des ordonnées le déviateur des contraintes

$$q \quad (q = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} : s_{ij}} \text{ avec } s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}).$$

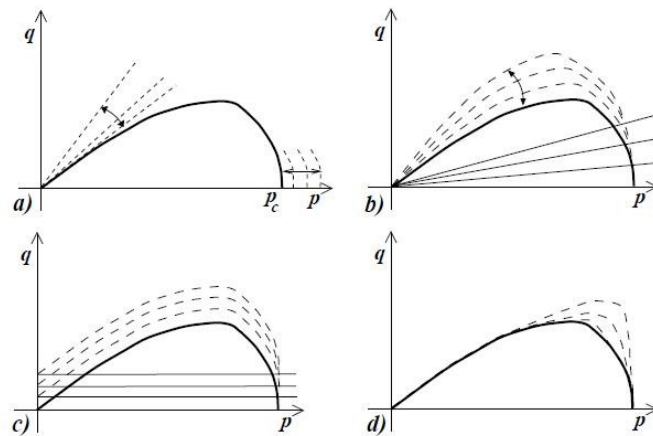


Illustration 2.1 : Différentes formes de lois d'écrouissage : a) isotrope ; b) rotation ; c) translation ; d) distorsion (Jeremić et al., 2009)

### 2.3.4 Règle d'écoulement plastique

La règle d'écoulement plastique exprime l'accroissement de déformation plastique en fonction des états de contrainte  $\sigma_{ij}$  et  $\dot{\sigma}_{ij}$ , et d'écrouissage  $k$ , par l'intermédiaire d'un potentiel plastique  $g$  qui peut être différent de la fonction de charge  $f$ . L'expression générale de l'écoulement plastique prend la forme suivante :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.9)$$

avec  $\dot{\lambda}$  un scalaire positif appelé multiplicateur plastique.

Lorsque les fonctions  $f$  et  $g$  diffèrent, la règle d'écoulement est dite non associée.

On introduit également, lorsqu'il y a écrouissage, la variable  $h(\sigma_{ij}, k)$ , appelée module d'écrouissage et définie par la relation :

$$h \dot{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (2.10)$$

### 2.3.5 Relations incrémentales avec seuil plastique unique

En considérant  $(\sigma_{ij}, k)$  l'état de contrainte et d'écrouissage sur la frontière du domaine d'élasticité actuel, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} f(\sigma_{ij}, k) &= 0 \\ \dot{\epsilon}_{ij} &= \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec  $\dot{\lambda} = 0$  en cas de déchargement et  $\dot{\lambda} > 0$  en cas de chargement.

Le multiplicateur plastique doit à son tour être déterminé pour définir complètement la relation de comportement. Il faut utiliser la condition de consistance  $\dot{f} = 0$ , qui indique que l'état de contrainte doit rester sur la surface de charge au cours du chargement  $f = 0$  et  $\dot{\lambda} > 0$ . Cette condition s'écrit :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial k} \dot{k} = 0 \quad (2.12)$$

La loi d'écrouissage de la variable  $k$  qui gouverne l'évolution de cette variable peut s'écrire comme suit :

$$\dot{k} = \dot{\lambda} l_k(\sigma_{ij}, k) \quad (2.13)$$

S'il y a d'autres variables internes pour décrire l'écrouissage, on définit aussi les règles d'écoulement qui leur correspondent sur le même modèle (équation 2.9).



Les relations précédentes permettent d'établir l'expression du module d'érouissage  $h$  :

$$\dot{\lambda} h = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = - \frac{\partial f}{\partial k} \dot{k} = - \frac{\partial f}{\partial k} \dot{\lambda} l_k \quad (2.14)$$

D'où, par identification des termes dans l'équation 2.14, on obtient :

$$h = - \frac{\partial f}{\partial k} l_k \quad (2.15)$$

En utilisant la propriété de partition des déformations élastique et plastique (équation 2.7), ainsi que la relation liant les incréments de contrainte aux incréments de déformations élastiques (équation 2.8), la condition de consistance (équation 2.12) permet d'établir l'expression du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  en charge :

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} A_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} A_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}}} \quad (2.16)$$

La relation incrémentale liant les incréments de déformations à ceux de contraintes prend alors la forme suivante (en charge) :

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left( A_{ijkl} - \frac{\left( A_{ijnm} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{nm}} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} A_{rskl} \right)}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{nm}} A_{nmrs} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}}} \right) \dot{\epsilon}_{kl} \quad (2.17)$$

### 2.3.6 Relations incrémentales pour l'élasto-plasticité à potentiels multiples

Cette partie s'inspire fortement des travaux de Mestat (2002). Les résultats d'expériences ont parfois amené à remettre en cause le choix de la théorie élasto-plastique à un mécanisme unique. Un schéma théorique plus large a été proposé par Koiter (1960), puis Mandel (1965) afin d'introduire des sources multiples de plasticité.

L'hypothèse de partition des déformations élastiques et plastiques demeure, mais la règle d'écoulement plastique devient une combinaison linéaire d'un certain nombre de potentiels plastiques distincts. Le nombre de potentiels plastiques peut, quant à lui, varier selon le chemin de chargement suivi. Chaque potentiel plastique définit un mécanisme plastique. La présence d'un potentiel plastique dans la règle d'écoulement indique que le mécanisme plastique associé est actif.

En supposant un nombre  $n$  maximum de mécanismes potentiellement actifs pour un matériau, le mécanisme  $i$  est caractérisé par une surface de charge

$f_i(\sigma_{pq}, k_i)$ , un potentiel plastique  $g_i$  et une variable d'écrouissage  $k_i$ . Les variables d'écrouissage  $k_i$  du mécanisme  $i$  peuvent dépendre de la plastification de tous les mécanismes actifs ou seulement du mécanisme  $i$  considéré. Il faut alors distinguer les variables de couplage des variables propres à chaque mécanisme. La notion de mécanisme actif est équivalente à la notion de mécanisme en charge, introduite ci-dessus dans le cas d'un mécanisme plastique unique.

Par définition, on a :

- si  $f_i < 0$  ou  $f_i = 0$  et  $\dot{f}_i < 0$ , le mécanisme  $i$  est considéré comme inactif et  $\dot{\lambda}_i = 0$  ;
- si  $f_i = 0$  et  $\dot{f}_i > 0$ , le mécanisme est actif et  $\dot{\lambda}_i > 0$ .

Pour un nombre  $m$  de mécanismes actifs, avec  $m \leq n$ , à un instant donné de chargement, le taux de déformation plastique est obtenu à partir de la somme des contributions plastiques de chaque mécanisme :

$$\dot{\epsilon}_{rs}^p = \sum_{i=1}^m \dot{\lambda}_i \frac{\partial g_i}{\partial \sigma_{rs}} \quad (2.18)$$

L'application de la condition de consistance au mécanisme  $i$ ,  $\dot{f}_i = 0$ , permet d'établir dans le cas général (présence de variables de couplage) la relation suivante :

$$\sum_{j=1}^m \left[ \left( \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_{pq}} \right) A_{pqrs} \left( \frac{\partial g_j}{\partial \sigma_{rs}} \right) - \left( \frac{\partial f_i}{\partial k_i} \right) l_j \right] \dot{\lambda}_j = \left( \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_{pq}} \right) A_{pqrs} \dot{\epsilon}_{rs} \quad (2.19)$$

Dans le cas où la variable  $k_i$  est une variable restreinte à un seuil particulier, les fonctions d'écrouissage  $l_j$  pour  $(j \in [1, m], j \neq i)$  seront nulles.

Le modèle de comportement s'exprime sous la forme d'une relation multilinéaire entre le taux de contrainte et celui de déformation. L'équation précédente, écrite pour l'ensemble des mécanismes actifs, conduit à un système de  $m$  équations :

$$\sum_{j=1}^m D_{ij} \dot{\lambda}_j = B_i \quad (2.20)$$

avec

$$\begin{cases} D_{ij} = \left( \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_{pq}} \right) A_{pqrs} \left( \frac{\partial g_j}{\partial \sigma_{rs}} \right) - \left( \frac{\partial f_i}{\partial k_i} \right) l_j \\ B_i = \left( \frac{\partial f_i}{\partial \sigma_{pq}} \right) A_{pqrs} \dot{\epsilon}_{rs} \end{cases} \quad (2.21)$$

## 2.4 Autres approches

### 2.4.1 Hypoplasticité

Les modèles constitutifs d'hypoplasticité ont été développés depuis les années 1980. Ils constituent une description alternative du comportement des sols. Ces modèles ne nécessitent pas de définir explicitement de surfaces de charge ou de potentiel plastique, tout en décrivant le comportement non linéaire et inélastique des sols. La forme générale des modèles hypoplastiques peut être ramenée à l'expression suivante :

$$\dot{\sigma}_{ij} = A_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} + b_{ij} \|\dot{\epsilon}\| \quad (2.22)$$

La première partie de l'expression 2.22 représente la part hypoélastique du modèle, relation linéaire. La seconde partie est quant à elle une fonction non linéaire caractérisant le comportement non linéaire du sol. Les tenseurs d'ordre 4  $A$  et d'ordre 2  $b$  peuvent dépendre selon les modèles de une ou plusieurs variables d'état, telles que les contraintes de Cauchy ou encore l'indice des vides du matériau.

Une description fine de ces formulations est notamment présentée par Tamagnini et al. (2000), se focalisant sur les capacités de deux classes de modèles hypoplastiques existants : le modèle développé par une équipe de chercheurs de Karlsruhe (Kolymbas, 1991) et celui développé à Grenoble par Caillerie et Chambon (1994).

### 2.4.2 Théorie de la plasticité généralisée

L'idée principale relative à la théorie de la plasticité généralisée, introduite par Zienkiewicz et Mróz (1984), puis étendue par Pastor et al. (1985, 1986, 1987, 1990) consiste à ne pas définir explicitement une surface de charge et un potentiel plastique. Les gradients de ces surfaces sont utilisés directement dans l'écriture des modèles.

De plus, cette théorie prédit l'apparition de déformations plastiques pour tout état de contraintes et toutes directions de chargement, indépendamment des conditions de chargement ou de déchargement. Pour cette théorie, le comportement élasto-plastique du matériau est décrit par une relation générale incrémentale :

$$\dot{\sigma} = H_t(\sigma, \dot{\sigma}, k_i) \dot{\epsilon} \quad (2.23)$$

Le tenseur de rigidité tangente  $H_t$  dépend de l'état de contrainte  $\sigma$ , de la direction du taux de contrainte  $\dot{\sigma}$  et de l'ensemble des variables internes du modèle,  $k_i$ .

La dépendance de  $H_t$  par rapport à la direction de  $\dot{\sigma}$  s'exprime en différenciant les différents cas de chargement, c'est à dire le cas de chargement ( $L$ ) pour « loading » et le cas de déchargement ( $U$ ) pour « unloading ». Les conditions de chargement/déchargement sont définies par les critères 2.24, pour un tenseur  $n$  normé  $\|n\|=1$ , d'ordre 1, définissant une direction dans l'espace des contraintes

à partir d'un état de contraintes  $\sigma$  :

$$\begin{cases} n \dot{\sigma}^e > 0 & \rightarrow \text{chargement} \\ n \dot{\sigma}^e < 0 & \rightarrow \text{déchargement} \\ n \dot{\sigma}^e = 0 & \rightarrow \text{chargement neutre} \end{cases} \quad (2.24)$$

avec  $\dot{\sigma}^e$  le taux de contrainte élastique, c'est à dire le taux de contrainte établi pour un matériau purement élastique. Le vecteur de direction  $n$  dans l'espace des contraintes est supposé connu pour chaque mécanisme. Il dépend de l'état de contrainte  $\sigma$  et de l'ensemble des variables d'écrouissage  $k$ .

En définissant :

$$\begin{cases} (H_{t,L})^{-1} &= (H_{t,e})^{-1} + \frac{1}{h_L} n_{gL} \otimes n \\ (H_{t,U})^{-1} &= (H_{t,e})^{-1} + \frac{1}{h_U} n_{gU} \otimes n \end{cases} \quad (2.25)$$

la continuité de chargement neutre est assurée car :

$$\dot{\epsilon}_L = (H_{t,e})^{-1} \dot{\sigma} = \dot{\epsilon}_U \quad (2.26)$$

$H_{t,e}$  est le tenseur de rigidité élastique. Les modules d'écrouissage en chargement,  $h_L$ , et en déchargement,  $h_U$ , sont obtenus sans faire référence à la surface de charge. Les tenseurs d'ordre 1  $n_{gL}$  et  $n_{gU}$ , normés, sont les directions normales aux potentiels plastiques de chargement et de déchargement.

Dans le cadre de la plasticité généralisée, le comportement non linéaire irréversible des sols peut être complètement défini par trois directions  $(n, n_{gL}, n_{gU})$ , deux fonctions scalaires  $(h_L, h_U)$  et un tenseur de rigidité élastique  $H_{t,e}$ .

Les équations établies dans le cadre de la plasticité généralisée gardent la même forme que celles établies dans le cadre élasto-plastique classique. Il est néanmoins possible de définir a posteriori une forme de surface de charge et de potentiel plastique en intégrant les termes  $n$  et  $n_{gL/U}$ , comme réalisé par Pastor et al. (1990).

## 2.5 Revue de modèles existants

L'objet de ce paragraphe est de présenter le comportement des sols sous chargements monotone et cyclique et les grandes classes de modèles existants adaptés à ce type de chargements.

### 2.5.1 Modélisation du comportement des sols granulaires

#### 2.5.1.1 Résultats expérimentaux

L'interprétation des essais triaxiaux en sollicitations monotones réalisés sur des sols

granulaires mène aux observations suivantes relevées par Mestat (2002) :

- Apparition de déformations irréversibles pour de faibles déformations. Le domaine d'élasticité de ces matériaux est très réduit.
- Les sables denses présentent un pic de résistance, suivi d'un radoucissement progressif. Le cisaillement imposé conduit alors dans un premier temps à une compression de l'échantillon suivie d'une augmentation de volume.
- Les sables lâches ne présentent pas de pic de résistance avant d'atteindre une valeur asymptotique limite. Le volume de l'échantillon diminue durant toute la durée de l'essai.
- L'enveloppe des points de rupture (équivalente au palier d'écoulement plastique sans déformation volumique) dans le plan de Mohr ( $\sigma, \tau$ ) est une droite passant par l'origine, tant pour un sable lâche que pour un sable dense ( $\sigma$  contrainte normale et  $\tau$  contrainte tangentielle locale).
- Lorsqu'il y a changement de comportement volumique, avec un passage d'une phase de contraction à une phase de dilatance, l'état du sol est appelé « état caractéristique ».
- La déformation volumique tend ensuite vers une limite pour les grandes déformations. La condition  $d\epsilon_v = 0$  correspond à la notion « d'état critique ».
- Pour les fortes pressions de confinement, une courbure de l'enveloppe de rupture apparaît vers l'axe des compressions isotropes.
- Les essais sur presse tridimensionnelle montrent une enveloppe de rupture en forme de triangle curviligne dans le plan déviatorique (illustration 2.2, Lade (1977)). Néanmoins, cette enveloppe ne présente pas de points anguleux.
- Pour les sables humides ou légèrement cimentés, l'enveloppe de rupture ne passe plus par l'origine et le matériau présente donc une cohésion.

Les résultats d'essais sous sollicitations cycliques permettent de mettre en évidence les points suivants (Cambou et Hicher, 2002) :

- Effet de l'histoire de chargement en contraintes qui agit essentiellement sur la partie déviatoire de la réponse. Cet effet traduit l'évolution d'une anisotropie induite avec l'histoire de chargement.
- Effet des variations de volume qui se traduit par une augmentation de densité en régime drainé ou une diminution de la contrainte effective en conditions non drainées, qui peut conduire à la liquéfaction des sols.

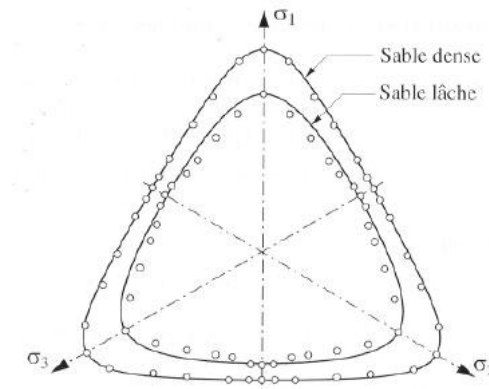


Illustration 2.2 : Trace de la surface de rupture d'après Lade(1977)

### 2.5.1.2 Modèles de comportement

Pour représenter le comportement des sables sous chargement monotone, différentes approches de modélisation dans le cadre de l'élasto-plasticité ont été mises en place :

- Modèle élasto-plastique parfaitement plastique : surface de rupture de Mohr-Coulomb.
- Modèles élasto-plastiques à deux mécanismes : la majorité de ces modèles associe un mécanisme plastique pour les sollicitations déviatoires (cisaillement) et un second pour les sollicitations isotropes. Jenck (2005) a établi une revue bibliographique étendue des modèles de ce type, dont le modèle CJS2 dans son approche hiérarchisée mise en place par Maleki (1998).
- Modèles élasto-plastiques à un mécanisme fermé sur l'axe des compressions isotropes (« cap model »). Jenck (2005) propose également une revue bibliographique de ces modèles, dont les modèles de Desai (1980) ou encore de Nova (1982) basé sur le modèle de Cam-Clay (présenté au §2.5.2.4).

Les modèles de type élasto-plastique basés sur un seul critère de plasticité (Mohr-Coulomb), à écouissage isotrope (type Cam-Clay), ou bien à deux surfaces de charge développant uniquement des écouissages isotropes (modèle de Lade (1977)), ne sont pas adaptés à la modélisation du comportement des sols sous sollicitations cycliques, mais donnent des résultats acceptables pour des chargements monotones. Dans le cadre de l'élasto-plasticité, un écouissage mixte apparaît nécessaire pour reproduire les phénomènes cycliques observés pour les sables. Cependant, la modélisation de l'anisotropie induite par la rotation des contraintes principales reste un des points les plus délicats.

Des modèles adaptés aux comportements des sables sous chargements cycliques existent et ont notamment été proposés par Ghaboussi et Momem (1979, 1982), Manzari et Dafalias (1997), Desai (1994) et Fang (2003), Hujeux (1985), Prévost et Keane (1990). Ces modèles intègrent de l'écouissage cinématique en translation, rotation ou mixte, avec un ou plusieurs mécanismes plastiques.

- Ghaboussi et Momem (1982) proposent un modèle cyclique pour les sables en utilisant un écrouissage isotrope et cinématique de la surface de charge. Le module d'écrouissage est supposé et les déformations volumiques sont calculées à partir d'une relation semi-empirique. Les déformations déviatoires sont issues d'une loi d'écoulement non associée. Ce modèle sous-estime la part des déformations plastiques de cisaillement, tandis que les déformations volumiques sont en bon accord avec les résultats.
- Le modèle élasto-plastique de Manzari et Dafalias (1997) est basé sur le concept d'état critique. Il combine deux surfaces de charge et la théorie de plasticité à surface limite (« bounding surface plasticity »). L'idée majeure de la plasticité à surface limite est construite sur la notion d'une surface englobant tous les états de contrainte possibles. La distance entre l'état de contrainte et son image sur la surface limite est utilisée pour évaluer le module d'écrouissage. La prise en compte de ces deux surfaces permet de définir une transition douce de l'état élastique à l'état plastique.

Dans le cadre de la plasticité généralisée, Pastor et al. (1990) définissent un modèle capable de représenter le comportement des sables sous sollicitations cycliques. Khoei et al. (2004) réalisent des simulations de tenue au séisme de digues en terre avec ce modèle en comparaison des résultats obtenus avec les « cap models ». Ils démontrent que cette approche permet notamment de mieux rendre compte du comportement réel de ces ouvrages sous séismes, notamment avec l'application sur le barrage de San Fernando, où la montée de pression interstitielle dans le barrage se produit après le séisme, phénomène observé lors du séisme de 1979. Ce modèle a également été utilisé par Fernandez Merodo (2001) pour simuler le phénomène de liquéfaction d'un talus de sable lâche sous chargement sismique.

## 2.5.2 Modélisation du comportement des argiles

### 2.5.2.1 Résultats expérimentaux

Les essais à l'appareil triaxial en sollicitations monotones, réalisés sur des sols cohérents naturels tels que les argiles, permettent d'identifier des traits de comportement généraux à cette classe de matériaux (Mestat, 2002) :

- Le comportement drainé général d'une argile est analogue à celui d'un sable. Les argiles surconsolidées présentent un pic de résistance et leur volume augmente au cours du cisaillement. Les argiles normalement consolidées diminuent de volume.
- Les argiles présentent un domaine réversible à l'intérieur duquel, pour un faible nombre de cycles de charge-décharge, le comportement du sol est réversible.
- La trace de la surface de rupture dans le plan  $(\sigma, \tau)$  est composée d'une partie incurvée pour les faibles pressions (domaine des argiles surconsolidées) et d'une droite pour les pressions plus fortes (domaine des argiles normalement consolidées).
- Des déformations irréversibles dues à la viscosité du sol sont également présentes en permanence.

Les essais de consolidation isotrope et les essais triaxiaux permettent d'introduire les concepts d'état limite et d'état critique.

### 2.5.2.2 État limite en compression isotrope

Les résultats d'un essai de compression isotrope sont reportés dans le plan  $(\ln p', e)$ , où  $e$  est l'indice des vides du matériau et  $p'$  la pression isotrope effective. Les courbes obtenues peuvent être simplifiées et assimilées à des droites (illustration 2.3), alors que le comportement réel des sols présente une hystérésis (illustration 2.4).

Lors du chargement isotrope sur une argile normalement consolidée, le comportement du sol s'assimile à une droite de pente  $\lambda$ . Cette partie de la réponse est appelée droite de consolidation normale. Le long de cette courbe, le sol est dit normalement consolidé et se trouve à l'état plastique. La courbe est généralement représentée par l'équation suivante :

$$e = e_\lambda - \lambda \ln p' \quad (2.27)$$

Lors d'un déchargement ou rechargement, le comportement du sol est modélisé par une droite de pente plus faible  $\kappa$ . Les phases de comportement, où le matériau a une réponse suivant la droite de pente  $\kappa$ , sont associées au domaine d'élasticité du matériau. La réponse élastique du matériau est contrôlée par un modèle élastique non linéaire. L'équation de cette courbe est la suivante :

$$e = e_\kappa - \kappa \ln p' \quad (2.28)$$

Les constantes  $e_\lambda$  et  $e_\kappa$  correspondent respectivement aux indices des vides obtenus pour une pression de référence  $p' = 1 \text{ kPa}$ .

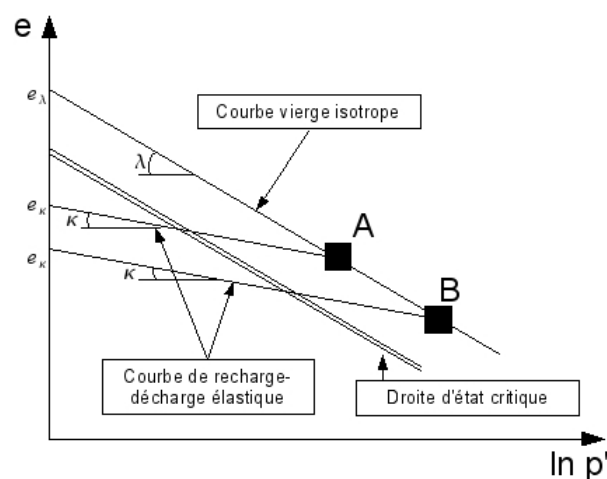


Illustration 2.3 : État limite et état critique dans le plan  $(\ln p', e)$



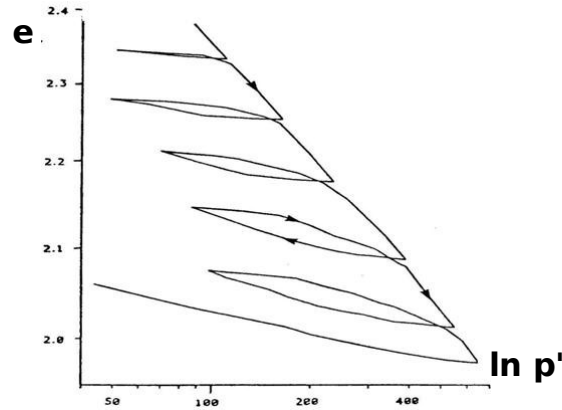


Illustration 2.4 : Comportement réel de la kaolinite sous charge-décharge isotropes dans le plan  $(\ln p', e)$  (Al-Tabbaa, 1987)

Les points A et B de l'illustration 2.3 sont des points de passage d'un état élastique à un état plastique. Ce sont des points d'état limite. Entre les points A et B, la courbe de déchargement garde la même pente, mais la quantité  $e_k$  évolue et pourra être considérée comme un paramètre d'écrouissage des modèles dans la description de l'essai de compression isotrope.  $e_k$  peut donc être qualifié d'indice des vides irréversible ou plastique.

### 2.5.2.3 État critique en compression triaxiale

Pour des argiles reconstituées, au cours d'un essai triaxial drainé, les échantillons de sol atteignent un palier d'écoulement plastique, caractérisé par un état de contraintes  $q/p'$  constant et une variation volumique nulle. Quand l'état critique est atteint, les différents états critiques obtenus pour un sol forment une droite unique dans l'espace  $(q, p', e)$  appelée droite d'état critique. Ces éléments décrivent l'état critique de l'échantillon formulé mathématiquement comme suit :

$$\begin{aligned} q &= M p' \\ e &= \Gamma - \lambda \ln p' \end{aligned} \quad (2.29)$$

avec :

- $M = \frac{6 \sin \phi}{3 - \sin \phi}$
- $\Gamma$  paramètre du matériau
- $\phi$  angle de frottement du matériau

Les résultats expérimentaux montrent que, dans le plan  $(\ln p', e)$ , la droite d'état critique est parallèle à la droite de consolidation vierge (voir illustration 2.3).

### 2.5.2.4 Modèles Cam-Clay et Cam-Clay modifiés

Le modèle Cam-Clay (Roscoe et al., 1958) et le modèle de Cam-Clay modifié (Roscoe et Burland, 1968) ont été développés pour décrire le comportement des argiles normalement consolidés ou faiblement surconsolidés. Deux versions successives du modèle de Cam-Clay ont été proposées.

Le premier modèle permettait de décrire qualitativement les phénomènes observés expérimentalement. Mais, pour des chemins de sollicitations proches de l'axe de compression et des rapports de contraintes faibles ( $p/p_c$ ), ce modèle prédit des déformations déviatoriques trop fortes.

Le second modèle corrigé par Roscoe et Burland (1968) modifie la loi d'écoulement et supprime la fonction logarithme de l'expression du seuil plastique, fonction délicate à intégrer numériquement. Ce modèle est actuellement disponible dans le logiciel Code\_Aster [R7.01.14].

Le tableau 2.1 présente la relation contrainte-dilatance, la surface de charge et la loi élastique non linéaire suivie par chacun de ces modèles, exprimée en respectant la convention de la mécanique des sols (état de compression positif) :

Modèle Cam-Clay	Version originale	Version modifiée
<b>Élasticité non linéaire</b>	$\dot{\epsilon}_v^e = \frac{\kappa}{1+e_0} \frac{\dot{p}'}{p'} \quad (2.30a)$ $\dot{\epsilon}_d^e = 0$	$\dot{\epsilon}_v^e = \frac{\kappa}{1+e_0} \frac{\dot{p}'}{p'} \quad (2.30b)$ $\dot{\epsilon}_d^e = \frac{1}{3G} dq$
<b>Surface de charge</b>	$\frac{q}{M p'} - \ln\left(\frac{p_c}{p'}\right) = 0 \quad (2.31a)$	$\left(\frac{q}{M p'}\right)^2 + 1 - \frac{p_c}{p'} = 0 \quad (2.31b)$
<b>Relation contrainte-dilatance</b>	$\frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_d^p} = M - \frac{q}{p'} \quad (2.32a)$	$\frac{\dot{\epsilon}_v^p}{\dot{\epsilon}_d^p} = \frac{M^2 - \left(\frac{q}{p'}\right)^2}{2 \frac{q}{p'}} \quad (2.32b)$

**Tableau 2.1 : Relation contrainte-dilatance, surface de charge et élasticité non linéaire pour les modèles Cam-Clay (Mestat, 2002)**

avec  $\epsilon_v^p = \epsilon_{ij}^p \delta_{ij}$  ,  $\epsilon_d^p = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p e_{ij}^p}$  ,  $e_{ij}^p = \epsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} \epsilon_v^p \delta_{ij}$  .

$G$  désigne le module de cisaillement et  $e_0$  l'indice des vides initial lié à l'état des contraintes initiales.

La pression de préconsolidation  $p_c$  est définie comme le point d'intersection entre la surface de charge du modèle et l'axe des pressions isotropes (illustration 2.5). Cette pression joue le rôle de variable d'écrouissage contrôlant les évolutions de la surface de charge. La loi d'écrouissage associée à cette variable s'écrit comme suit :

$$p_c = p_{c0} \exp\left(\frac{1+e_0}{\lambda-\kappa} \epsilon_v^p\right) \quad (2.33)$$

où  $p_{c0}$  correspond à la pression de préconsolidation initiale.

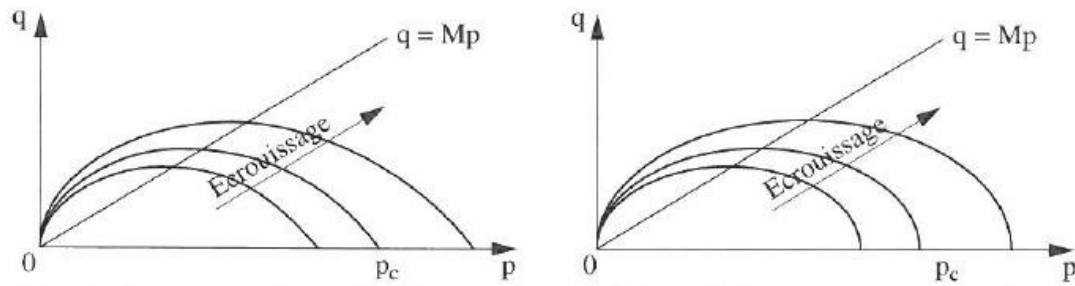


Illustration 2.5 : Représentation des surfaces de charge dans le plan  $(p, q)$  ; (gauche) modèle initial, (droite) modèle modifié (Mestat, 2002)

Les modèles de comportement de type Cam-Clay comportent finalement sept paramètres matériaux :  $e_\lambda$ ,  $\lambda$ ,  $\kappa$ ,  $M$ ,  $e_0$ ,  $\nu$  et  $P_{c0}$ .  $\Gamma$  est donné par la relation :  $\Gamma = e_\lambda - \lambda + \kappa$ .

### 2.5.2.5 Limitations des modèles de type Cam-Clay

#### 2.5.2.5.1 Anisotropie des argiles naturelles

Les modèles de type Cam-Clay représentent bien un grand nombre de phénomènes qui caractérisent le comportement des argiles normalement consolidées sous chargement monotone. En revanche, ces modèles ne permettent pas de décrire les phénomènes typiques qui apparaissent dans les sables ou les argiles surconsolidées.

Les modèles de type Cam-Clay ne tiennent pas compte de l'anisotropie des argiles naturelles, due au mode de déposition des matériaux. Ces modèles ont été développés en considérant les sols comme isotropes. Des évolutions ont donc été apportées pour corriger ces points. Il existe notamment le modèle Mélanie développé par Kattan (1990), Lepidas et Magnan (1990) et Mouratidis et Magnan (1983) cités par Mestat (2002). Ce modèle élasto-plastique est finalement construit avec une surface de charge à écouissage isotrope et une relation élastique linéaire anisotrope.

#### 2.5.2.5.2 Comportement des argiles sous sollicitations cycliques

La modélisation du comportement des sols sous chargements cycliques est un autre point faible des modèles de type Cam-Clay. Les modèles basés sur le concept d'état critique estiment convenablement les chargements monotones appliqués aux sols, mais ces modèles sont incapables de modéliser correctement le comportement des sols sous chargement cyclique. Lors des phases de déchargement et d'éventuelles phases de re-chargement, le comportement cyclique est uniquement modélisé par un comportement élastique, alors que les résultats font apparaître des déformations irréversibles au cours des cycles successifs.

Des modèles adaptés aux comportements des argiles sous sollicitations cycliques existent dans la littérature, dont par exemple le « bubble model », développé par Al-Tabbaa (Al-Tabbaa (1987), Al-Tabbaa et Muir Wood (1989)) ou par la suite le

modèle de Barnichon (2002). Ces modèles intègrent de l'écrouissage isotrope et cinématique avec un ou plusieurs mécanismes plastiques.

Al-Tabbaa (1987) développe un modèle à deux surfaces de charge avec écrouissage cinématique. Ce modèle est basé sur le modèle Cam-Clay modifié et permet notamment d'obtenir de bons résultats pour le comportement de la kaolinite pour des états suconsolidés. Ce modèle est très proche des modèles développés par Mróz et al. (1979) et Hashiguchi (1985).

Une surface de charge interne, de dimension plus réduite, délimite le domaine élastique du modèle et enregistre des informations relatives aux changements antérieurs de sollicitations en contraintes. Une fonction d'interpolation est utilisée pour réduire la valeur des modules de rigidité du modèle lorsque la surface de charge intérieure s'approche de la surface extérieure. La surface de charge intérieure a la même forme que la surface de charge extérieure, identique à celle décrite dans le modèle Cam-Clay modifié (équation 2.31b), réduite suivant un coefficient d'homothétie  $R$ . La surface extérieure prend à présent le nom de surface limite (« bounding surface »). La loi d'écoulement plastique est normale à la surface de charge intérieure. La translation de la surface de charge intérieure suit une direction obtenue du point image de l'état de contraintes sur la surface de charge limite.

Stallebrass (1990) étend ce modèle « Bubble » en introduisant une surface cinématique supplémentaire relative à l'histoire des chargements précédents. Une description fine du modèle étendu est présentée par Hau (2003).

Barnichon (2002) présente un modèle de comportement à deux surfaces limites. La première surface limite dérive d'une simplification du modèle de Kaliakin et Dafalias (1990) (cité par Barnichon (2002)). La seconde surface limite est issue du modèle « bubble » (Al-Tabbaa (1987)) étendue à une forme généralisée. En effet, le modèle original est écrit uniquement pour des simulations d'essais triaxiaux, soit  $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3$ . Elle incorpore à la fois le concept de surface limite et d'écrouissage mixte (isotrope et cinématique).

### 2.5.3 Modèles de comportement unifiés

Comme précisé en introduction (§2.1), la volonté de modéliser le comportement des digues en terre pour les différentes phases de leur vie a conduit l'ingénierie d'EDF à plutôt considérer un modèle de comportement dit « unifié », capable de modéliser à la fois le comportement des argiles ou des sables pour des sollicitations monotones et cycliques.

Le développement de modèles capables de prédire convenablement le comportement des sols sous des chargements cycliques est essentiel pour résoudre des problèmes géotechniques tels que la consolidation des sols sous les voies de transport (ferroviaires ou routières), le comportement de structures géotechniques sous séismes, sous le vent ou encore la houle.

Dans le cadre de la plasticité, pour décrire le comportement monotone et cyclique des sols, il est possible de distinguer dans la littérature deux grandes classes de modèles :

- modèles à surface limite,

- modèles à multi-mécanismes plastiques.

La première classe de modèles est caractérisée par deux surfaces, une extérieure et une autre située à l'intérieur de la première. Il est ensuite nécessaire de poser une règle pour la définition du module d'écrouissage reliée aux deux surfaces (Dafalias, 1987).

La seconde classe de modèles concerne le concept des surfaces de charge multiples et la théorie de l'écrouissage cinématique introduits par Mróz (1967) et Iwan (1967) pour les métaux et appliqués aux sols par Prévost (1977, 1978), Aubry et al. (1982) suivi de Hujeux (1985).

### **2.5.3.1 Modèles à surface limite**

Dafalias et Popov (1975) ont introduit la théorie de la plasticité avec surface limite.

Des modèles à surface limite ont alors été développés, à partir des modèles de type Cam-Clay, pour décrire le comportement cyclique des argiles (Dafalias et Herrmann (1980), Al-Tabbaa (1987), Stallebrass (1990)) mais également le comportement cyclique des sables (Manzari et Dafalias (1997)). Yu et al. (2007) ont proposé un modèle unifié pour représenter le comportement des sols et des argiles en réalisant une extension du modèle CASM développé par Yu (1998), nommée CASM-c.

Le modèle CASM (Clay And Sand Model, Yu (1998)) est construit sur le modèle Cam-Clay. C'est un modèle à surface de charge unique intégrant le concept d'état critique. La loi d'écoulement définie pour ce modèle découle d'un potentiel plastique différent de celui de la surface de charge. La loi d'écrouissage associée à la pression critique de référence n'est plus uniquement dépendante des déformations volumiques plastiques, mais également des déformations déviatoires plastiques (Yu, 1995).

Deux paramètres supplémentaires sont ajoutés par rapport au modèle Cam-Clay. Le premier permet de modifier la forme de la surface de charge et le second permet de modifier la position de l'intersection entre la ligne d'état critique et la surface de charge. Il est possible avec ce modèle de définir un état critique qui ne se produit pas nécessairement au pic du déviateur des contraintes sur la surface de charge. Ceci est notamment observé expérimentalement pour les sables (Coop (1990) cité par Hau (2003)).

Le potentiel plastique du modèle CASM suit la relation de contrainte-dilatance de Rowe (1962). Le choix de cette loi d'écoulement conduit à un écoulement non associé.

Le modèle est basé sur l'expression d'une surface limite (« bounding surface ») sur laquelle est défini un point image de l'état de contrainte actuel dans le plan  $(p', q)$ . Ce point image est construit par l'intersection de la surface limite et d'une ligne droite passant par l'origine et l'état de contrainte actuel. Le module d'écrouissage associé à l'état de contraintes actuel appartenant à la surface de charge résulte de la somme du module d'écrouissage calculé au point image et d'une fonction de la distance entre le point image et l'état de contrainte actuel.

Le modèle étendu CASM-c introduit cinq nouveaux paramètres pour décrire le comportement cyclique des sols.

- Deux de ces paramètres contribuent à l'estimation du module d'écrouissage pour les chargements vierges.
- Les modules d'écrouissage du modèle sont également définis différemment pour les cas de déchargement et de rechargement. Ils contrôlent la pente de la courbe contrainte-déformation en fonction des cas de déchargement ou de rechargement.
- Le dernier paramètre, introduit dans cette version du modèle CASM, définit le domaine d'adaptation du matériau. L'adaptation caractérise le comportement d'un matériau qui, sous l'action de cycles de chargement, est purement élastique.

Ces modifications permettent notamment de corriger la surestimation des déformations irréversibles obtenues avec le modèle original de Dafalias et Popov (1977) et permettent également de reproduire le comportement hystérétique des sols entre le déchargement et le re-chargement.

### **2.5.3.2 Modèle de Hujeux (1985)**

Le modèle de comportement dit de « Hujeux », conçu au laboratoire MSSMat de l'ECP (Hujeux (1979), Aubry et al. (1982), Hujeux (1985)), est un des modèles élastoplastiques cycliques de mécanique des sols (géomatériaux granulaires : argiles sableuses, normalement consolidées ou sur-consolidées, graves...) le mieux adapté pour des simulations d'ouvrages géotechniques soumis au séisme. Il est de plus exploité depuis de nombreuses années par le Centre d'Ingénierie Hydraulique de l'EDF. Son paramétrage est donc bien maîtrisé.

Les points suivants permettent de résumer la construction du modèle :

- Ce modèle multi-mécanismes (sphériques – pour un trajet isotrope – et déviatoires) à variables mémoratrices est caractérisé par huit surfaces de charge avec écrouissage, définies pour des trajets monotones et pour des trajets cycliques.
- Il intègre le concept d'état critique et le critère de rupture de Mohr-Coulomb.
- Les mécanismes déviatoires sont définis par plans fixes, ce qui induit une anisotropie de comportement du sol. Les mécanismes isotropes portent uniquement sur le comportement isotrope des sols.
- A l'intérieur de ces surfaces de réversibilité, le comportement du matériau est élastique non linéaire.
- Un écrouissage isotrope des surfaces de charge de chaque plan est introduit et porte sur une mobilisation progressive de l'angle de frottement du matériau. Cet écrouissage par plan permet notamment de générer une anisotropie induite du comportement du sol.
- L'écrouissage cinématique des surfaces de charge, permettant de caractériser le comportement cyclique des sols, est contrôlé par des variables d'histoire à évolution discontinue.
- La règle d'écoulement normal est adoptée pour les mécanismes isotropes, tandis que la règle d'écoulement pour les mécanismes déviatoires est non associée, suivant la règle de dilatance de Roscoe et al. (1958).
- Le tenseur de déformation plastique résulte du cumul des contributions des

divers mécanismes actifs (théorie présentée au §2.3.6 ). La déformation plastique volumique couple l'ensemble des mécanismes.

La description complète du modèle de Hujeux est présentée au chapitre §3 .

## 2.6 Intégration des modèles de comportement élastoplastique

La méthode des éléments finis est de plus en plus utilisée pour analyser le comportement de structures dans des domaines d'ingénierie très variés. Le comportement de ces structures se caractérise souvent par des non linéarités, qui nécessitent des algorithmes robustes pour l'intégration numérique des modèles de comportement inélastiques. La conception de modèles de comportement, leur validation et utilisation dans des codes de calcul ne peuvent pas être abordées sans la dimension de mise en œuvre numérique de ces modèles et sans la qualité des schémas d'intégration retenus dans un code de calcul industriel.

L'intégration numérique des modèles de comportement doit combiner les aspects de précision et de stabilité des calculs locaux réalisés en regard du modèle de comportement continu, mais également les aspects de temps de calcul local nécessaire à la résolution du problème non linéaire local. Les schémas d'intégration locale contrôlent directement la précision et la stabilité de la solution numérique globale de la structure.

Le modèle de comportement, incorporé dans un code de calcul par éléments finis, sera appelé en chaque point d'intégration du modèle numérique. A cet instant de chargement  $t_{n+1}$ , l'algorithme de résolution globale de l'équilibre de la structure fournira une estimation de l'incrément de déformations  $\Delta \epsilon_{n+1}$  (pour un code de calcul où les inconnues nodales sont les déplacements). Le modèle de comportement devra alors renvoyer l'incrément de contraintes correspondant  $\Delta \sigma_{n+1}$ , ainsi que la mise à jour des variables d'histoire  $\Delta k_{n+1}$ . L'incrément de déformations  $\Delta \epsilon_{n+1}$ , établi à partir du déséquilibre mécanique entre les efforts extérieurs et les forces internes, varie, selon le choix du modélisateur, pour un schéma de résolution globale type Newton original ou modifié.

Les techniques d'intégration peuvent être séparées en deux grandes catégories, à savoir les approches explicites (prédiction d'Euler, « forward Euler ») ou les approches implicites (Retour d'Euler, « backward Euler »). Les éléments présentés ci-dessous sont en grande partie issus du travail bibliographique réalisé par Huang et Griffiths (2009), Oliver et al. (2008) et Piccuezzi (1991).

Les notions relatives à la formulation incrémentale des modèles élastoplastiques, dont nous avons besoin dans cette section pour présenter les différents algorithmes d'intégration locale, ont été préalablement présentées au §2.3 . La majorité des modèles présentés au §2.5 ne peuvent pas conduire à une intégration analytique des équations différentielles qui les décrivent. Le problème, discrétisé en temps, est alors posé au travers d'un système d'équations différentielles, auquel est ajouté les équations non linéaires, qui traduisent le respect des surfaces de charge du modèle.

Les schémas d'intégration explicites sont le plus souvent stables moyennant le respect de certaines conditions qui conduisent à limiter fortement l'amplitude des incréments de chargement pour assurer la consistance des modèles et limiter la dépendance des prédictions à la discrétisation du chargement employée. Ces schémas sont très robustes, mais coûteux en temps de calcul à cause des faibles incréments de chargement.

La discrétisation explicite de la formulation incrémentale est aisée, car on dispose d'une équation fournissant directement l'expression de l'incrément du multiplicateur plastique  $\Delta \lambda_{n+1}$  (équation de consistance), sans résoudre un problème non linéaire. Le principe de résolution présenté en 2.34 est un cas particulier d'un modèle de comportement à mécanisme plastique unique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \lambda_{n+1} = \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_n : A_n : \Delta \epsilon_{n+1}}{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_n : A_n : \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)_n - \left( \frac{\partial f}{\partial k} \right)_n l_n} \\ \Delta \sigma_{n+1} = A_n : \Delta \epsilon_{n+1} - \Delta \lambda_{n+1} A_n : \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)_n \\ \Delta k_{n+1} = \Delta \lambda_{n+1} l_n \end{array} \right. \quad (2.34)$$

L'indice  $n$  fait référence à la solution convergée à l'instant  $t_n$  et  $(n+1)$  à l'instant  $t_{n+1}$ .

Le respect de l'équation définissant la surface de charge n'est pas assuré, car il n'est pas pris en compte explicitement dans cette approche et on peut avoir des problèmes de divergence.

Pour les schémas implicites, Simo et Taylor (1985) ont proposé la méthode implicite de projection du point le plus proche (« Closest Point Projection Method », CPPM). Cette méthode de discrétisation directe des équations assure leur respect à chaque pas de temps. Elle bénéficie de plus d'un résultat de convergence vers la solution continue (Moreau (1973), Hughes (1983)). Elle consiste à établir dans un premier temps une prédiction élastique des contraintes, à partir des équations élastiques et de l'incrément de déformation complet. Cette prédiction élastique est ensuite corrigée et ramenée par projection vers la ou les surfaces de charge mise(s) à jour du modèle.

Le système discrétisé, présenté dans l'équation 2.35, est une illustration pour un modèle à mécanisme plastique unique, de l'algorithme d'intégration implicite type CPPM :



$$\begin{cases} \sigma_{n+1} - \sigma_n - A_{n+1} : \Delta \epsilon_{n+1} + \Delta \lambda_{n+1} A_{n+1} : \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)_{n+1} = 0 \\ k_{n+1} - k_n - \Delta \lambda_{n+1} l_{n+1} = 0 \\ f_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

En posant  $Y_{n+1} = (\sigma_{n+1}, k_{n+1}, \Delta \lambda_{n+1})$ , on peut écrire un vecteur résidu  $R(Y_{n+1})$  :

$$R(Y_{n+1}) = \begin{pmatrix} \sigma_{n+1} - \sigma_n - A_{n+1} : \Delta \epsilon_{n+1} + \Delta \lambda_{n+1} A_{n+1} : \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right)_{n+1} \\ k_{n+1} - k_n - \Delta \lambda_{n+1} l_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Pour résoudre le problème, on peut appliquer une méthode de Newton sur le système complet (c'est à dire le résidu) :

**Phase de Prédiction**

$$Y_{n+1}^0 = Y_{n+1}^*$$

**Phase de Correction**

$$R(Y_{n+1}^{m+1}) = R(Y_{n+1}^m) + \frac{\partial R(Y_{n+1}^m)}{\partial (Y_{n+1}^m)} (Y_{n+1}^{m+1} - Y_{n+1}^m) = 0 \quad (2.37)$$

**Avec:**

$m$ : numéro d'itération

La phase de prédiction est établie en appliquant par exemple un tir d'Euler, approche explicite. L'estimation de  $\frac{\partial R(Y_{n+1}^m)}{\partial (Y_{n+1}^m)}$  nécessite le calcul de dérivées partielles du second ordre pour les divers éléments du modèle élastoplastique. La convergence du problème non linéaire local est considérée atteinte au respect d'un critère de convergence portant sur la norme de  $R(Y_{n+1}^{m+1})$ . A chaque itération, la valeur de  $Y_{n+1}^{m+1}$  est mise à jour de la manière suivante :

$$Y_{n+1}^{m+1} = Y_{n+1}^m - \left( \frac{\partial R(Y_{n+1}^m)}{\partial (Y_{n+1}^m)} \right)^{-1} R(Y_{n+1}^m) \quad (2.38)$$

La stabilité numérique inconditionnelle et la précision de cette méthode ont notamment été examinées par Ortiz et Popov (1985). Sa convergence quadratique vers la solution assurée au niveau global rend cette solution attractive et justifie notamment sa place prépondérante au sein des méthodes d'intégration numérique. Elle présente néanmoins des difficultés pour la mettre en place, telles que :

- la construction du module élasto-plastique consistant,
- la nécessité de calculer les gradients des lois d'écoulement (ce qui demande des calculs analytiques supplémentaires),
- une convergence locale difficile à obtenir dans les zones où les surfaces de charge présentent de fortes courbures ou des changements de régime tel que le régime d'adoucissement du matériau par exemple.

Cette classe d'algorithmes a été adaptée à une large classe de modèles de comportement des sols (Manzari et Nour (1997) ; Rouainia et Muir Wood (2001) ; Montáns et Borja (2002) ; Borja et al. (2003)). Ces modèles dérivent souvent du modèle de Cam-Clay modifié (Roscoe et Burland (1968)), incluant par exemple un écrouissage cinématique (Foster et al. (2005)).

En anglais, on nomme cette classe de méthode « return mapping algorithm ». La méthode de retour radial (« radial return algorithm ») proposée par Krieg et Krieg (1977) est un cas particulier de cette classe, appliqué au modèle de Von Mises.

D'autres méthodes ont également intéressé les chercheurs, telles que la méthode de « Cutting Plane Algorithm » (CPA) présentée par Simo et Ortiz (1985) et Ortiz et Simo (1986). Le schéma demande un processus explicite d'intégration qui a démontré des propriétés intéressantes de convergence. L'algorithme mis en place nécessite uniquement le calcul de dérivées premières. En revanche, il n'est pas possible d'établir de module élasto-plastique consistant linéarisé. Ce schéma est conditionnellement stable. De plus, des erreurs de précision notables apparaissent dès que les incréments de chargement augmentent.

Une méthode d'intégration mixte entre les approches implicite et explicite a été mise en place par Oliver et al. (2008). Cette méthode réalise une intégration implicite de l'état de contrainte à partir d'une extrapolation explicite des variables internes du modèle. Cette méthode, nommée IMPL-EX, a été présentée pour deux classes de modèles de comportement, à savoir un modèle d'endommagement et un modèle élasto-plastique. Les avantages avancés par les auteurs de cette méthode sont les suivants :

- le tenseur constitutif tangent est symétrique et défini positif, même si le tenseur analytique ne l'est pas.
- la robustesse de la méthode est meilleure si on emploie la matrice sécante (Bargellini (2009)).
- en l'absence de sources de non-linéarités autres que celles induites par le modèle de comportement, ce tenseur tangent reste constant. A chaque incrément, la solution est obtenue après une itération. Un gain certain en temps de calcul est obtenu.

L'ordre de précision de l'algorithme d'intégration est au moins linéaire. Néanmoins, l'erreur absolue est plus importante que pour les méthodes implicites et une forte

dépendance au pas de temps est observée.

Il existe peu de comparaisons entre les méthodes d'intégration pour un même modèle de comportement. Les conclusions extraites de ces travaux apparaissent alors différentes en fonction des modèles, puisque Manzari et Prachathananukit (2001) préconisent pour un modèle à surface limite (« bounding surface ») une méthode d'intégration implicite type CPPM en comparaison aux méthodes de « cutting plane » et explicite avec « sous incrémentations ». En revanche, Wathugala et Pal (1999) critiquent les méthodes implicites en démontrant des problèmes de divergence et de stabilité pour les modèles HiSS (Desai (1994)). Ces dernières conclusions sont, en revanche, établies pour des chargements purement monotones tandis que la première étude a été menée pour des chargements sismiques appliqués à une colonne de sol.

Néanmoins, le choix pour les méthodes type « CPPM » a été largement adopté pour traiter de nombreux modèles de comportement non linéaires dans beaucoup de domaines.

## 2.7 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter la théorie de l'élasto-plasticité appliquée au comportement des sols. Par la suite, le comportement général des argiles et des sables a été présenté et des exemples de modèles représentatifs ont été cités. Néanmoins, il est nécessaire de préciser que la complexité des modèles est souvent liée à celle des phénomènes représentés. Cette complexité a un effet direct sur le nombre de paramètres des modèles utilisés. Ces paramètres matériaux sont ensuite souvent difficiles à définir, en raison du manque de données expérimentales ou des problèmes de recalage. L'utilisation d'un modèle et sa diffusion s'accompagne donc nécessairement d'une procédure maîtrisée d'identification des paramètres matériaux.

Les modèles élasto-plastiques dits unifiés apparaissent comme adaptés aux besoins de cette thèse pour la modélisation de remblais soumis à des séismes. La modélisation du comportement cyclique des sols nécessite néanmoins un niveau de complexité élevé pour les modèles de comportement aptes à en saisir le plus de détails.

Le modèle de Hujeux a été choisi pour modéliser les différentes phases de la vie d'un remblai, à savoir sa construction, sa mise en eau et sa tenue au séisme. Ce modèle est utilisé depuis la fin des années 1980 par le Centre d'Ingénierie Hydraulique (CIH) de l'EDF. Le CIH, fort de son expérience sur ce modèle, souhaite en disposer dans le logiciel par Éléments Finis Code\_Aster. Le travail à suivre consiste donc à intégrer numériquement ce modèle dans Code\_Aster.

Différents algorithmes d'intégration présents dans la littérature ont également été présentés dans le but de choisir le schéma le mieux adapté aux besoins de cette thèse. Les aspects de flexibilité et précision des résultats ont été la motivation majeure dans le choix de l'algorithme type CPPM au vu des résultats publiés pour des applications du type chargement sismique (Manzari et Prachathananukit (2001)).

### 3 Formulation théorique du modèle de Hujeux (1985)

3 Formulation théorique du modèle de Hujeux (1985).....	39
3.1 Relation de comportement de Hujeux.....	39
3.2 Définition des variables d'état et expression de l'énergie libre.....	41
3.2.1 Variables d'état.....	41
3.2.2 Énergie libre.....	42
3.2.3 Loi élasto-plastique non linéaire de Hujeux.....	43
3.3 Mécanismes élasto-plastiques déviatoires.....	44
3.3.1 Critères déviatoires en chargement monotone.....	44
3.3.2 Lois d'écoulement et d'écrouissage en chargement monotone.....	46
3.3.3 Critères déviatoires en chargement cyclique.....	47
3.3.4 Lois d'écoulement et d'écrouissage en chargement cyclique.....	48
3.4 Mécanismes isotropes.....	50
3.4.1 Critère isotrope en chargement monotone.....	51
3.4.2 Lois d'écoulement et d'écrouissage en chargement monotone.....	51
3.4.3 Critère isotrope en chargement cyclique.....	52
3.4.4 Lois d'écoulement et d'écrouissage en chargement cyclique.....	52
3.5 Traitement des états de traction.....	54
3.6 Paramètres élastoplastiques du modèle.....	54

#### 3.1 Relation de comportement de Hujeux

Le modèle de comportement des sols de Hujeux a été développé par les chercheurs de l'Ecole Centrale Paris (ECP) dans les années 1980 afin de représenter la rhéologie des sols pour des chargements alternés, par exemple sous séisme. Cette relation de comportement de mécanique des sols est un modèle multi-mécanismes, caractérisé par deux fois quatre surfaces de charge avec écrouissage : trois reliées à des mécanismes déviatoires et une à un mécanisme isotrope, définies pour des trajets monotones et des trajets cycliques. Les mécanismes déviatoires sont définis sur trois plans fixes, ce qui induit une orthotropie de comportement du sol. Les mécanismes sphériques reproduisent la forte non-linéarité du comportement des géomatériaux sur un chemin de chargement isotrope.

Au Laboratoire MSSMat de l'ECP, il existe plusieurs versions du modèle de Hujeux mises en œuvre dans le logiciel éléments finis GEFDyn :

- une version V0 intégrée en explicite, avec les 4x2 mécanismes d'écrouissage dans un repère cartésien fixe ( $(x, y, z)$  ou  $(r, \theta, z)$  (Costa D'Aguiar, 2008)), et une élasticité non linéaire. Ce modèle correspond au modèle implanté, en implicite, dans le cadre de cette thèse dans le logiciel Code\_Aster ;
- une version V1, dite ISOGE0, exprimée en contraintes principales, sur le repère déterminé au pas précédent puis réactualisé, établie par Piccuezzi (1991) mais peu expérimentée par l'ECP ;
- une version V2, dite GEOMAT, où les critères de plasticité sont exprimés dans les plans de cisaillement et de contraintes normales, sur un à trois des plans fixes. Elle est dédiée aux matériaux cohérents représentant une anisotropie initiale comme de la maçonnerie et des roches, où des variables d'endommagement (quatre pour chaque direction de fissuration : amplitude

et direction) ont été ajoutées par rapport au modèle de base élasto-plastique. Cette extension du modèle permet de représenter la fissuration et la baisse de raideur anisotrope dans les plans perpendiculaires à la fissuration. Ce modèle a été appliqué en trajet cyclique dans le cadre de la thèse de Piccuezzi (1991). Modaressi (2003) présente l'application de ce modèle aux panneaux de maçonnerie et aux roches.

- Une version V3 (Aubry et al., 1990), dédiée aux interfaces, utilisée notamment dans la thèse de Costa d'Aguiar (2008), qui s'est intéressée aux interfaces sol/pieu et à la localisation des déformations autour des pieux. Cette formulation est utile pour représenter les surfaces de rupture d'une structure en géomatériaux, en poursuite d'un calcul reposant sur une cinématique de milieux continus. Les discontinuités estimées sont ajoutées à partir de l'observation des zones à fort gradient de déformation. Ces modèles ont également été utilisés pour modéliser des discontinuités cinématiques situées à l'intérieur d'un massif rocheux (Lopez-Caballero (2003a)) ou de roche (Modaressi et Aubry (1989)).

Le modèle décrit ci-dessous correspond au modèle indicé V0.

Chacun des plans déviatoires, indicé par  $k$ , est défini par les vecteurs de base  $(e_{i_k}, e_{j_k})$ , extraits de la base  $(e_1, e_2, e_3)$  de l'espace à trois dimensions. On note les indices :

$$\begin{cases} i_k = 1 + \text{mod}(k, 3) \\ j_k = 1 + \text{mod}(k+1, 3) \end{cases} \quad (3.1)$$

**Remarque :**

Pour les modélisations en déformations planes (2D-PLAN), le plan  $k=3$  correspond au plan  $(e_1, e_2)$  du modèle.

Le modèle comporte une élasticité non linéaire contrôlée par le module d'Young dépendant de la pression de confinement. Le coefficient de Poisson est supposé constant.

Un critère limite tridimensionnel proche de celui de Mohr-Coulomb est considéré pour prendre en compte l'influence de la contrainte moyenne effective sur la raideur du sol et des caractéristiques de rupture. Le concept d'état critique est également intégré à ce modèle pour représenter le couplage entre les contraintes déviatoires et les variations de volume et formuler l'écrouissage isotrope lié au milieu granulaire. Un écrouissage cinématique est ajouté pour représenter le comportement cyclique des sols, couplé à l'écrouissage en densité du sol.

Le modèle de Hujoux est exprimé en contraintes effectives dans le cas d'une modélisation couplée hydro-mécanique : la pression hydrostatique du fluide n'est pas prise en compte par le modèle de Hujoux explicitement. Ce modèle a été

étendu au comportement des sols non saturés dans le cadre de la thèse de Abou-Bekr (1995) et aux chargements non isothermes (Laloui (1995) ; Modaressi et Laloui (1997) ; Modaressi et Modaressi(1995)).

## 3.2 Définition des variables d'état et expression de l'énergie libre

### 3.2.1 Variables d'état

Les variables servant à décrire l'état du point matériel sont les suivantes :

- $\epsilon$  : tenseur de déformation ;
- $\epsilon^p$  : tenseur de déformation plastique : on note spécialement  $\epsilon_v^p = \text{tr } \epsilon^p = \epsilon_{ij}^p I_{ji}$  la déformation plastique volumique,  $I$  étant le tenseur identité.
- $r_k^m$  : les facteurs de mobilisation des mécanismes déviatoires en trajet monotone : ils interviennent pour l'écrouissage isotrope des surfaces de charge déviatoires ;
- $r_k^c$  : les facteurs de mobilisation des mécanismes déviatoires cycliques : ils interviennent pour l'écrouissage mixte (isotrope et cinématique) des surfaces de charge déviatoires cycliques ;
- $r_4^m$  : le facteur de mobilisation du mécanisme isotrope en trajet monotone : il intervient comme écrouissage isotrope de la surface de charge ;
- $r_4^c$  : le facteur de mobilisation du mécanisme isotrope cyclique : il intervient pour l'écrouissage mixte (isotrope et cinématique).

Les divers mécanismes d'évolution élasto-plastique font intervenir des variables d'écrouissage : les facteurs de mobilisation et la déformation volumique plastique cumulée,  $\epsilon_v^p$ , commune à l'ensemble des mécanismes et jouant le rôle de variable de couplage.

Pour simplifier les écritures, le tenseur des contraintes effectives est noté  $\sigma$  et la pression de confinement isotrope effective  $p$  est définie par la relation  $p = 1/3 \text{tr}(\sigma)$ . Pour chaque mécanisme plastique rattaché à un plan  $k$ , on note par :

$$\sigma_{(k)} = O_{(k)} \sigma O_{(k)} \quad (3.2)$$

les contraintes considérées dans le plan  $k$ , où  $O_{(k)}$  désigne le tenseur symétrique de projection sur le plan de base  $(e_{i_k}, e_{j_k})$ , de normale  $e_k$  :

$$O_{(k)} = e_{i_k} \otimes e_{j_k} + e_{j_k} \otimes e_{i_k} \quad (3.3)$$

avec  $i_k$  et  $j_k$  définis par la relation 3.1.

Le tenseur  $\sigma_{(k)}$  s'écrit finalement sous la forme explicite suivante :

$$\sigma_{(k)} = \sigma_{i_k i_k} e_{i_k} \otimes e_{i_k} + \sigma_{j_k j_k} e_{j_k} \otimes e_{j_k} + \sigma_{i_k j_k} e_{i_k} \otimes e_{j_k} \quad (3.4)$$

La pression de confinement du plan  $k$  est établie suivant la formule :

$$p_k(\sigma) = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_{(k)}) \quad (3.5)$$

Pour les mécanismes déviatoires, le tenseur des contraintes déviatoires  $S_{(k)}$  doit être défini de la façon suivante :

$$S_{(k)}(\sigma) = \sigma_{(k)} - p_k(\sigma) I_{(k)} \quad (3.6)$$

On note enfin la norme de Von Mises du tenseur des contraintes déviatoires  $S_{(k)}$  :

$$q_k(\sigma) = \|S_{(k)}(\sigma)\|_{VM}^{2D} = \sqrt{\frac{1}{2} (S_{ij})_{(k)} (S_{ij})_{(k)}} \quad (3.7)$$

Par ailleurs, plusieurs variables d'histoire sont nécessaires à la définition des différents mécanismes cycliques. Une description fine de ces variables sera présentée aux paragraphes §3.3 et §3.4. L'évolution de ces variables est discontinue et correspond aux états matériaux atteints au moment du déchargement du mécanisme considéré :

- $p_H$  : variable scalaire mémoratrice, enregistrant la valeur de la pression de confinement  $p(\sigma)$  ;
- $\epsilon_{vH}^p$  : variable scalaire mémoratrice, enregistrant la valeur de la déformation plastique volumique ;
- $p_{kH}$  : variable scalaire mémoratrice, enregistrant la valeur de la pression de confinement du plan  $k$ ,  $p_k$  ;
- $S_{(k)H}$  : variable tensorielle mémoratrice, enregistrant la valeur du déviateur des contraintes  $S_{(k)}$  du plan  $k$  ;
- $S_{(k)H}^c$  : variable tensorielle mémoratrice, enregistrant la valeur du déviateur des contraintes « modifiées »  $S_{(k)}^c(\sigma, \epsilon_v^p, r_k^c)$  du plan  $k$ .

### 3.2.2 Énergie libre

On note l'énergie libre par la somme d'une contribution élastique et d'une contribution d'érouissage :

$$\mathcal{F}(\epsilon(\vec{u}), \epsilon^p, r_k^K) = \mathcal{F}_{\text{elas}}(\epsilon(\vec{u}), \epsilon^p) + \mathcal{H}_{\text{écr}}(\epsilon_v^p, r_k^K) \quad (3.8)$$

pour  $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  et  $K \in [m, c]$ .

La dissipation thermodynamique est obtenue par différence à partir de la densité de

puissance de déformation, ceci dans un processus isotherme :

$$\mathcal{D} = \sigma \epsilon(\dot{\vec{u}}) - \dot{\mathcal{F}}(\epsilon(\vec{u}), \epsilon^p, r_k^K) = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ji}^p - \dot{\mathcal{H}}_{\dot{\epsilon}_{cr}}(\epsilon_v^p, r_k^K) \quad (3.9)$$

Le couplage thermique n'est pas résolu. On ne peut donc pas différencier la densité de puissance dissipée du taux d'énergie d'écrouissage, correspondant à un terme d'énergie bloquée. Cependant,  $\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ji}^p$  n'est pas nécessairement positive, contrairement à  $\mathcal{D}$ . La partie élastique du modèle de Hujeux est non linéaire : il est difficile d'en extraire l'expression du potentiel  $\mathcal{F}_{elas}(\epsilon(\vec{u}), \epsilon^p)$ .

Comme le modèle de comportement de Hujeux possède une élasticité non linéaire particulière (cf §3.2.3), on ne peut pas donner l'expression intégrée de l'énergie libre du modèle de Hujeux.

En revanche, en considérant le cas particulier de l'élasticité linéaire à température constante et un modèle de Hujeux réduit à un unique mécanisme déviatoire, Modaressi et al. (1999), reprenant une partie des travaux de Modaressi et al. (1994) sur les modèles de type Cam-Clay avec une loi de dilatance de type Roscoe, ont établi l'expression de l'énergie libre et de la dissipation du modèle de Hujeux. L'application des principes de la thermodynamique a montré que le seuil de plasticité du modèle de Hujeux (dans sa formulation standard, Hujeux (1979)) ne correspondait pas exactement à la formulation découlant de l'énergie libre et de la dissipation établie.

Le point de différence concerne l'expression de la pression critique,  $P_c$ . La pression critique introduite dans le modèle de Hujeux, identique à celle du modèle Cam-Clay, ne dépend pas des déformations déviatoires plastiques, mais uniquement des déformations volumiques plastiques (équation 3.13).

### 3.2.3 Loi élasto-plastique non linéaire de Hujeux

On admet que le module d'Young du sol dépend de la pression de confinement<sup>1</sup> effective  $p'(\sigma)$  par une loi puissance, dans le domaine des compressions  $p'(\sigma) < 0$ . Les modules de compression et de cisaillement sont définis comme des fonctions non linéaires de la pression isotrope :

$$\begin{aligned} K(p') &= K_{ref} \left( \frac{p'}{P_{ref}} \right)^{n^e} \\ G(p') &= G_{ref} \left( \frac{p'}{P_{ref}} \right)^{n^e} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Les modules initiaux de cisaillement  $G_{ref}$  et de compressibilité  $K_{ref}$  sont mesurés à la pression de confinement de référence  $P_{ref}$  et  $n^e$  précise le degré de non-linéarité.

Le cas  $n^e = 0$  correspond à l'élasticité linéaire.

<sup>1</sup> hypothèse issue de la théorie de Hertz appliquée aux assemblages de billes puis généralisée aux matériaux granulaires, Biarez et Hicher(1994).



En pratique, cette loi conduit à une plus grande rigidité du sol au fur et à mesure que l'on descend en profondeur.

### 3.3 Mécanismes élasto-plastiques déviatoires

On considère trois mécanismes déviatoires : un dans chaque plan de glissement  $k$  de normale  $e_k$ . Une distinction est néanmoins faite pour différencier le comportement monotone du sol et le comportement sous chargement cyclique. Une surface de charge dite monotone est sollicitée pour des états de contrainte maximaux jamais subis auparavant par le matériau. Des surfaces de charge cycliques sont introduites, caractérisées par des variables d'histoire à évolution discontinue, pour des cycles de chargement (surface active dès la décharge à partir de l'état atteint à la fin du trajet monotone).

#### 3.3.1 Critères déviatoires en chargement monotone

Les mécanismes déviatoires dans le plan  $(e_{i_k}, e_{j_k})$  pour un trajet monotone et vierge sont régis par le critère :

$$f_k^m(\sigma, \epsilon_v^p, r_k^m) = q_k(\sigma) + p_k(\sigma) F(p_k(\sigma), \epsilon_v^p) r_k^m \leq 0 \quad (3.11)$$

avec  $p_k(\sigma)$  et  $q_k(\sigma)$  définis en 3.5 et 3.7 à partir des contraintes effectives  $\sigma$ .

La fonction qui caractérise la résistance du sol en fonction de la déformation volumique plastique prend la forme :

$$F(p_k(\sigma), \epsilon_v^p) = M \left( 1 - b \ln \left| \frac{p_k(\sigma)}{P_c(\epsilon_v^p)} \right| \right) \quad (3.12)$$

Les expressions précédentes font intervenir deux nouveaux paramètres matériau :

- $M = \sin \phi_{pp}$  avec  $\phi_{pp}$  l'angle de frottement matériau à l'état critique ;
- $b$  paramètre positif contrôlant la forme de la surface de charge. Il varie entre 0 et 1, d'une surface de charge de type Mohr-coulomb à une surface de charge de type Cam-Clay.

La variable d'écrouissage  $r_k^m$  évolue entre une valeur initiale  $r_{ela}^d$ , paramètre matériau caractérisant la taille du seuil à l'état initial et l'unité correspondant à la surface de plasticité parfaite pour ce mécanisme.

Les critères (ou surfaces de charge plastique) font intervenir la fonction de pression critique, qui caractérise la résistance du sol, dépendant de l'indice des vides dans le matériau (écrouissage en densité) :

$$P_c(\epsilon_v^p) = P_{c0} \exp(-\beta \epsilon_v^p) \quad (3.13)$$

Deux paramètres matériau interviennent dans la définition de cette pression

critique : la pression critique de référence initiale  $P_{c0}$  (négative) et  $\beta$ , la compressibilité plastique du matériau (positive). La pression critique croît en valeur absolue lorsque le matériau subit une déformation plastique volumique négative (compression de l'échantillon).

Le critère établi en 3.11 s'inspire fortement du modèle de Cam-Clay original. Néanmoins, l'expression a été modifiée par Hujeux (1979), car ce modèle sous-estimait les déformations déviatoires pour des argiles surconsolidées. Pour corriger cette faiblesse, la surface de charge a été modifiée en introduisant une dépendance en fonction des déformations déviatoires, via les facteurs de mobilisation, sans modifier la règle d'écoulement volumique de Roscoe (1958).

L'illustration 3.1 permet de visualiser l'effet du paramètre de forme  $b$  et du facteur de mobilisation  $r_k^m$  sur le seuil du mécanisme par rapport à la droite d'état critique et la droite d'état caractéristique, qui tient compte du passage d'un état contractant à dilatant. Les valeurs présentées sont factices mais permettent de rendre compte de l'effet des paramètres ou variables d'écrouissage sur la forme de la surface de charge déviatoire monotone.

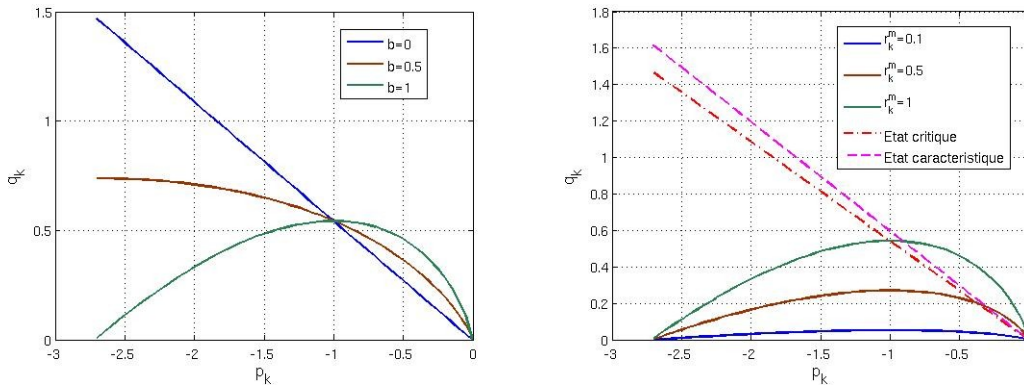


Illustration 3.1 : Surface de charge déviatoire monotone représentée dans le plan  $(p_k, q_k)$

#### Remarque :

Le critère monotone peut être reformulé en normalisant la contrainte déviatoire  $q_k(\sigma)$  par le terme  $(p_k(\sigma) F(p_k(\sigma), \epsilon_v^p))$ , de telle sorte qu'il peut être représenté géométriquement par un cercle de rayon  $r_k^m$  :

$$f_k^m = \frac{q_k(\sigma)}{p_k(\sigma) F(p_k(\sigma), \epsilon_v^p)} - r_k^m \leq 0 \quad (3.14)$$

Cette expression est rendue possible pour tout état de contrainte garantissant

$p_k(\sigma) \neq 0$ . Par la suite, la quantité  $\frac{q_k(\sigma)}{p_k(\sigma) F(p_k(\sigma), \epsilon_v^p)}$  sera notée  $\tilde{q}_k(\sigma)$  et le

tenseur normalisé de la partie déviatoire des contraintes sera noté  $(\tilde{S}_k)_{ij}$ .

### 3.3.2 Lois d'écoulement et d'écrouissage en chargement monotone

Les taux de déformation plastique se décomposent en une partie purement déviatoire, respectant une loi d'écoulement associée par rapport à la surface de charge et une partie volumique, non associée, respectant les principes de la loi de dilatance de Roscoe (1958). L'expression de la loi d'écoulement est la suivante :

$$\left(\dot{\epsilon}_k^m\right)_{ij}^p = \dot{\lambda}_k^m \left(\Psi_k^m\right)_{ij} = \dot{\lambda}_k^m \left( \frac{(S_k)_{ij}}{2q_k(\sigma)} - \frac{\alpha \zeta(r_k^m)}{2} \left( \sin \psi + \frac{q_k(\sigma)}{p_k(\sigma)} \right) (I_k)_{ij} \right) \quad (3.15)$$

Le tenseur unité est défini par la relation suivante :  $(I_k) = e_{ik} \otimes e_{ik} + e_{jk} \otimes e_{jk}$

Le tenseur d'ordre 2  $\Psi_{(k)}^m$  désigne la direction d'écoulement plastique. L'angle caractéristique  $\psi$  correspond à l'angle de frottement associé à une variation nulle de volume (Luong (1980)). Cet angle divise le plan  $(p_k, q_k)$  en un domaine contractant ( $q_k < \sin \psi |p_k|$ ) et un domaine dilatant ( $q_k > \sin \psi |p_k|$ ).  $\alpha$  est un paramètre matériau défini comme le coefficient de dilatance.

La fonction  $\zeta(r)$  permet de contrôler l'amplitude de la variation de volume lors d'un écoulement plastique déviatoire. En conditions drainées, en dessous d'un niveau de déformations, la variation de volume reste nulle sous chargement déviatoire. En conditions non drainées, l'évolution de la pression interstitielle dépend notamment des déformations déviatoires. L'expression de la fonction  $\zeta(r)$  est établie au regard de ces résultats expérimentaux :

$$\zeta(r) = \begin{cases} 0 & r < r_{hys} \rightarrow \text{domaine pseudo-élastique} \\ \left( \frac{r - r_{hys}}{r_{mob} - r_{hys}} \right)^m & \text{si } r_{mob} > r > r_{hys} \rightarrow \text{domaine hystérétique} \\ 1 & r > r_{mob} \rightarrow \text{domaine plastique} \end{cases} \quad (3.16)$$

Les paramètres matériaux  $r_{hys}$  et  $r_{mob}$  délimitent les frontières du domaine hystérétique. Ce domaine est relatif aux petites déformations ( $< 1\%$ ) et a un rôle très important pour le comportement du modèle sous séisme.

La loi d'évolution suivie par la variable interne  $r_k^m$  est régie par les mêmes multiplicateurs plastiques  $\dot{\lambda}_k^m$  que ceux introduits pour la définition de  $(\dot{\epsilon}^p)$  :

$$\dot{r}_k^m = \dot{\lambda}_k^m l_k^m = \dot{\lambda}_k^m \frac{(1 - r_k^m)^2}{a} \quad (3.17)$$

Le paramètre  $a$  a un rôle important pour la construction du module d'écrouissage. Une valeur faible de  $a$  conduit à atteindre rapidement le déviateur maximal de contraintes. L'approche la plus simple, considérant  $a$  comme une constante, ne permet pas de respecter le comportement expérimental des matériaux. La valeur de

$a$  évolue en fonction des déformations déviatoires. Hujeux (1985) propose la relation suivante :

$$a = a_c + \zeta \left( r_k^m \right) (a_m - a_c) \quad (3.18)$$

$a_m$  et  $a_c$  sont deux paramètres matériaux (strictement positifs). L'évolution des facteurs de mobilisation est strictement positive. De plus, on impose  $r_k^m \leq 1$ .

Les surfaces de charge déviatoires monotones sont considérées actives tant que la valeur normalisée  $\frac{q_k(\sigma)}{p_k(\sigma) F(p_k(\sigma), \epsilon_v^p)}$  est égale à la valeur maximale historique atteinte par le degré de mobilisation monotone  $r_k^m$ .

Quand un chargement sollicite une décharge des mécanismes monotones, il faut considérer les mécanismes déviatoires cycliques, définis tangents aux seuils des mécanismes monotones dans le plan  $(\tilde{S}_k)_{ij}$ . Une succession de charge/décharge/recharge conduit à modifier l'expression du seuil cyclique tant que cela s'avère nécessaire.

### 3.3.3 Critères déviatoires en chargement cyclique

La création d'un mécanisme déviatoire « fils » est initiée lorsqu'une décharge apparaît au niveau d'un mécanisme monotone. Si le seuil de plasticité du mécanisme « fils » est franchi, le mécanisme cyclique est alors considéré comme actif.

Une création successive de mécanismes cycliques est possible, lorsque des changements de direction de chargement interviennent.

Il est également possible après décharge puis recharge par exemple, qu'un mécanisme monotone succède à un mécanisme cyclique, lorsque l'état de contrainte entre en contact avec le seuil historique le plus écroui.

L'illustration 3.2 (page 50) permet de présenter pour un chemin de chargement donné l'évolution des surfaces de charge monotone et cycliques du modèle de Hujeux. Pour faciliter la lisibilité du graphique, certains termes changent d'expression, tels que  $t_{(k)}^H \rightarrow n_k$  (défini à l'éq.3.22),  $(\tilde{S}_k)_{ii} \rightarrow (\tilde{S}_k)_1$  et  $(\tilde{S}_k)_{ij} \rightarrow (\tilde{S}_k)_2$  (définis à partir de l'éq.3.14).

Les surfaces de charge des mécanismes déviatoires cycliques prennent l'expression générale suivante :

$$f_k^c(\sigma, \epsilon_v^p, r_k^c) = q_k^c(\sigma, \epsilon_v^p, r_k^c) + p_k(\sigma) F(p_k(\sigma), \epsilon_v^p) r_k^c \leq 0 \quad (3.19)$$

où  $q_k^c(\sigma, \epsilon_v^p, r_k^c)$  est une variante de  $q_k(\sigma)$  :

$$q_k^c(\sigma, \epsilon_v^p, r_k^c) = \|S_{(k)}^c(\sigma, \epsilon_v^p, r_k^c)\|_{VM}^{2D} \quad (3.20)$$

avec

$$S_{(k)}^c(\sigma, \epsilon_v^p, r_k^c) = S_{(k)}(\sigma) - p_k(\sigma) F(\sigma, \epsilon_v^p) (X_{(k)}^H + r_k^c t_{(k)}^H) \quad (3.21)$$

La variable d'écrouissage  $r_k^c$  évolue entre la valeur initiale  $r_{\text{éla}}^{dc}$  définissant le domaine initial du mécanisme cyclique déviatoire et le degré de mobilisation monotone  $r_k^m$ . Cette variable introduit l'effet d'écrouissage au cisaillement pour les mécanismes déviatoires cycliques.

Le tenseur mémoire  $X_{(k)}^H$ , définissant le point de tangence entre les surfaces « fils » et « père », et le vecteur normal  $t_{(k)}^H$  indiquant la direction de chargement précédant le changement de direction sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} (X_{(k)}^H)_{ij} = \frac{(S_{(k)}^H)_{ij}}{p_k^H(\sigma) F^H(\sigma, \epsilon_v^p)} \\ (t_{(k)}^H)_{ij} = \frac{(S_{(k)}^{cH})_{ij}}{q_k^{cH}(\sigma, \epsilon_v^p, r_k^c)} \end{cases} \quad (3.22)$$

**Remarque :**

La surface de charge cyclique peut également être exprimée comme un cercle de rayon  $r_k^c$  :

$$f_k^c = \frac{q_k^c(\sigma, \epsilon_v^p, r_k^c)}{p_k(\sigma) F(p_k(\sigma), \epsilon_v^p)} - r_k^c \quad (3.23)$$

### 3.3.4 Lois d'écoulement et d'écrouissage en chargement cyclique

L'écoulement plastique lié à ces mécanismes est associé pour la partie déviatoire et non associé pour la partie volumique, de façon analogue au traitement réalisé pour l'écoulement plastique issu des mécanismes monotones :

$$(\Psi_k^c)_{ij} = \left( \frac{(S_{(k)}^c(\sigma, \epsilon_v^p, r_k^c))_{ij}}{2 q_k^c(\sigma, \epsilon_v^p, r_k^c)} - \frac{\alpha \zeta(r_k^c)}{2} \left( \sin \psi + \frac{(S_{(k)})_{mn} : (S_{(k)}^c)_{mn}}{2 q_k^c(\sigma, \epsilon_v^p, r_k^c) p_k(\sigma)} \right) (I_k)_{ij} \right) \quad (3.24)$$

L'évolution de la variable d'écrouissage  $r_k^c$  est déterminée et choisie de façon à assurer l'égalité suivante pour les variables monotones et cycliques :

$$h_{kr}^K = f_{k,r_k}^m l_k^m = f_{k,r_k}^c l_k^c \quad (3.25)$$

Le module d'écrouissage  $h_{kr}^K$  a la même expression finale pour les mécanismes monotones et cycliques. A partir de l'expression établie pour le mécanisme

monotone, l'évolution de  $r_k^c$  s'écrit :

$$\dot{r}_k^c = \dot{\lambda}_k^c \frac{(1 - r_k^c)^2 \gamma_k^c}{a_c + \zeta(r_k^c)(a_m - a_c)} \quad (3.26)$$

avec

$$\gamma_k^c = \frac{2 q_k^c}{2 q_k^c - (S_k^c)_{mn} : (t_k^H)_{mn}} \quad (3.27)$$

L'obtention de la fonction  $\gamma_k^c$  n'a pu être établie qu'après la mise en place de tests de non régression mettant en avant une rotation de l'état de contraintes (§9.3 , p.209). La formulation explicite de cette fonction n'apparaît pas dans les articles de référence définissant le modèle de Hujeux (Hujeux, 1985 ; Aubry et Modaressi, 1996).

### Commentaires sur l'illustration 3.2 :

La première phase représente, à partir d'un état de contrainte isotrope, un chargement déviatoire monotone (passage du point 0 au point A).

Le troisième schéma présente la configuration établie lorsqu'une décharge intervient au niveau du chargement déviatoire. Un mécanisme déviatoire cyclique est créé et défini par le couple de variables d'histoire  $((X_k^H)_{ij}, (n_k)_{ij})$  (point B).

Le quatrième schéma présente l'écrouissage mixte suivi par une surface de charge déviatoire cyclique. Le centre du « cercle » (représentant la surface de charge cyclique) se déplace le long de l'axe défini par le tenseur  $(n_k)_{ij}$  (passage du point B au point C).

Le cinquième schéma représente le cas d'une nouvelle décharge cyclique, qui conduit à une évolution discontinue du couple des variables d'histoire  $((X_k^H)_{ij}, (n_k)_{ij})$ . On conserve néanmoins les informations relatives au mécanisme « père » cyclique précédent (cercle en pointillés). On remarquera que la direction retenue pour définir  $(n_k)_{ij}$  est établie suivant la direction entre le centre du cercle du mécanisme « père » et le point de chargement correspondant à la décharge (équ. 3.22)(passage du point C au point D).

Le sixième schéma présente à nouveau l'écrouissage mixte de la surface de charge cyclique du mécanisme « fils »(point F).

Le septième schéma présente plusieurs phases de l'évolution des surfaces de charge déviatoire :

- dans un premier temps, la surface de charge du mécanisme « fils » s'est écrouie jusqu'au niveau précédemment atteint par la surface de charge du mécanisme « père ». Ce chargement conduit à rétablir le mécanisme cyclique « père »(passage du point F au point G) ;
- la surface de charge du mécanisme « père » continue à s'écrouir jusqu'à atteindre le niveau historique maximum de chargement déviatoire (point H). Le mécanisme monotone est alors réactivé le long de ce chemin de

chargement. L'écroûssage subi par cette surface de charge monotone est uniquement isotrope (point J).

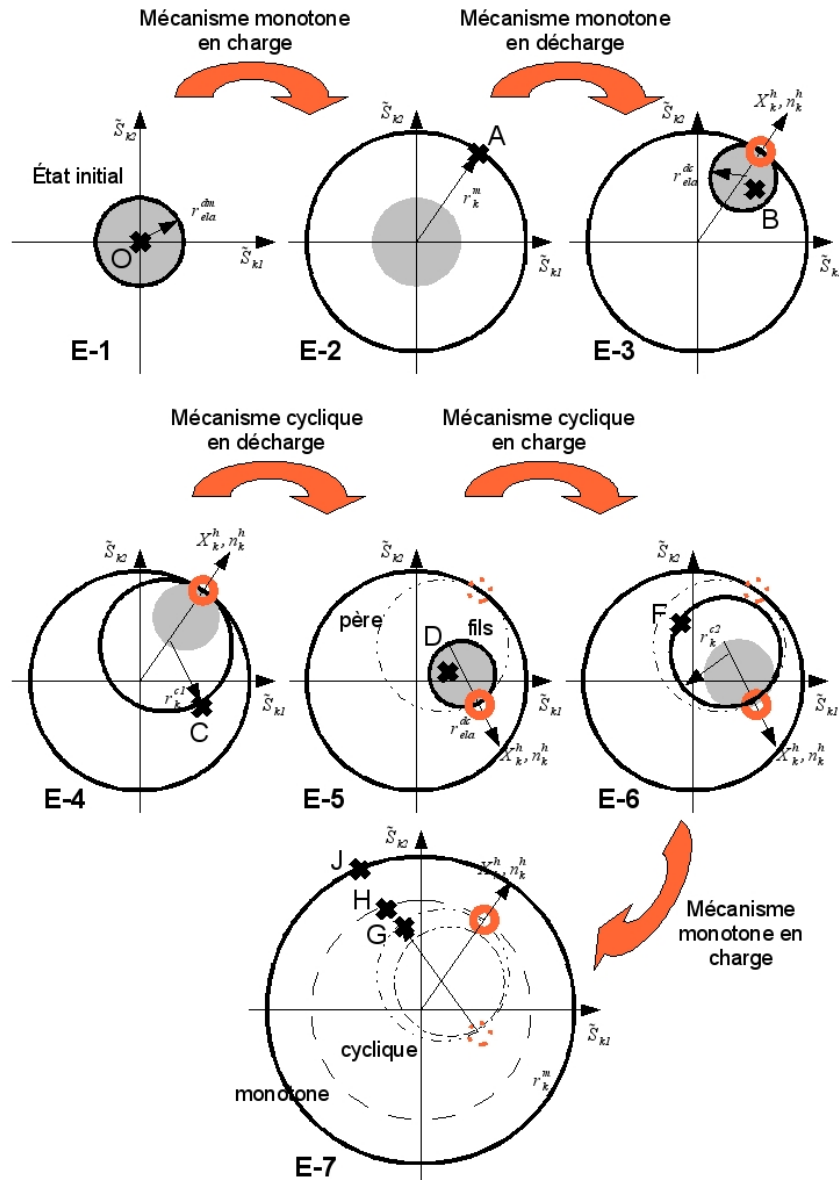


Illustration 3.2 : Évolution des surfaces de charge des mécanismes déviatoires suivant un trajet de chargement aléatoire [R7.01.23]. Les points ronds indiquent les changements de direction de chargement.

### 3.4 Mécanismes isotropes

Sur des chemins de chargement isotrope, les différents mécanismes déviatoires ne sont pas sollicités. Or, les géomatériaux présentent une forte non-linéarité sur ces chemins de chargement. Dans le domaine des compressions  $p(\sigma) < 0$ , un comportement élasto-plastique est identifié pour les chemins vierges en compression et un autre comportement, contrôlé par une variable d'histoire locale, pour les chargements cycliques (voir illustration 3.4). Ces mécanismes génèrent

uniquement des déformations volumiques et sont couplés aux mécanismes déviatoires par la déformation volumique plastique.

### 3.4.1 Critère isotrope en chargement monotone

Le mécanisme isotrope pour un trajet monotone est régi par le critère :

$$f_4^m(\sigma, \epsilon_v^p, r_4^m) = |p(\sigma)| + d P_{c0} \exp(-\beta \epsilon_v^p) r_4^m \leq 0 \quad (3.28)$$

Deux nouveaux paramètres matériaux interviennent dans l'expression de ce critère (équation 3.28). Le paramètre  $d$  définit la distance entre la droite d'état critique et la droite de consolidation isotrope dans le plan  $(\ln|p|, e)$  (voir illustration 3.3). Le rayon élastique  $r_{ela}^s$  caractérise la taille du seuil à l'état élastique et intervient dans l'expression de la variable d'écrouissage  $r_4^m = (\bar{r}_4^m + r_{ela}^s)$ .

**Remarque :** En pratique, à l'état initial, la valeur  $r_4^m$  est calculée explicitement de façon à équilibrer le seuil associé au mécanisme isotrope monotone.

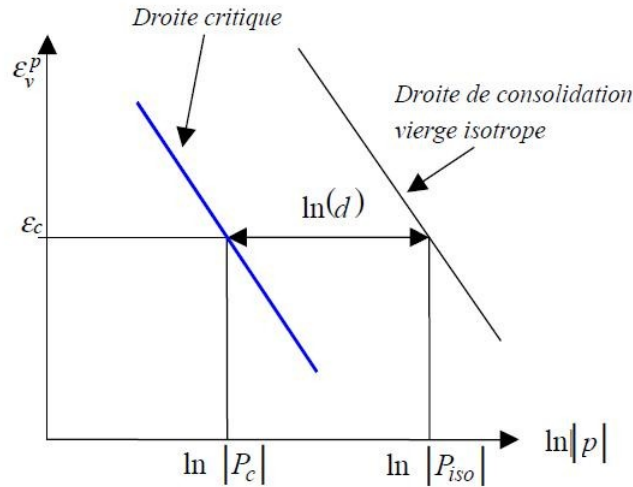


Illustration 3.3 : Définition du paramètre  $d$  utilisé dans l'expression des seuils des mécanismes isotropes

### 3.4.2 Lois d'écoulement et d'écrouissage en chargement monotone

La loi d'écoulement plastique pour ce mécanisme est associée et sa contribution aux taux de déformations plastiques prend la forme suivante :

$$(\dot{\epsilon}_4^m)^p = \dot{\lambda}_4^m (\Psi_4^m) = \dot{\lambda}_4^m \frac{p}{3|p|} I_{ij} = \frac{1}{3} \dot{\lambda}_4^m \text{sign}(p) I_{ij} \quad (3.29)$$

$\dot{\lambda}_4^m$  désigne le multiplicateur plastique sphérique monotone, qui doit être positif.



On notera  $sign(p) = \frac{p}{|p|}$ , ce qui donne en pratique  $\dot{\lambda}_4^m sign(p) \leq 0$ . Ce mécanisme génère par conséquent uniquement des déformations de contractance.

La loi d'évolution suivie par le degré de mobilisation  $r_4^m$  est pilotée par le même multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}_4^m$  :

$$\dot{r}_4^m = \dot{\lambda}_4^m l_4^m = \dot{\lambda}_4^m \frac{(1 - r_4^m)^2}{c_m} \frac{P_{ref}}{P_c(\epsilon_v^p)} \quad (3.30)$$

$c_m$  est un paramètre matériau positif. L'évolution  $\dot{r}_4^m$  doit toujours être positive et le degré de mobilisation doit toujours rester inférieur à l'unité,  $r_4^m \leq 1$ .

### 3.4.3 Critère isotrope en chargement cyclique

Dans le cas d'un chargement isotrope cyclique, un mécanisme isotrope cyclique est défini et construit suivant la même approche que celle présentée pour les mécanismes déviatoires cycliques. L'expression du critère de ces mécanismes est la suivante :

$$f_4^c(\sigma, \epsilon_v^p, r_4^c, X_4^H) = |p^c(\sigma, \epsilon_v^p, X_4^H)| + d P_c(\epsilon_v^p) r_4^c \leq 0 \quad (3.31)$$

avec :

$$\begin{cases} X_4^H &= \frac{p^H}{d P_c(\epsilon_v^p)^H} \\ p^c(\sigma, \epsilon_v^p, X_4^H) &= |p(\sigma)| + d P_c(\epsilon_v^p) X_4^H \end{cases} \quad (3.32)$$

$p^H$  et  $P_c(\epsilon_v^p)^H$  désignent les valeurs atteintes par  $p(\sigma)$  et par  $P_c(\epsilon_v^p)$  au point de décharge. Le paramètre  $r_{ela}^{sc} \in ]0, 1[$ , souvent initialisé à la même valeur que  $r_{ela}^s$ , caractérise la taille du seuil correspondant à l'état élastique et intervient dans l'expression de la variable d'écrouissage  $r_4^c = (\bar{r}_4^c + r_{ela}^{sc})$ .

### 3.4.4 Lois d'écoulement et d'écrouissage en chargement cyclique

La contribution du mécanisme isotrope cyclique au taux des déformations plastiques a une forme identique à celle du mécanisme isotrope monotone :

$$(\dot{\epsilon}_4^c)_{ij}^p = \dot{\lambda}_4^c (\Psi_4^c)_{ij} = \dot{\lambda}_4^c \frac{p p^c}{3 |p| |p^c|} I_{ij} = \frac{1}{3} \dot{\lambda}_4^c sign(p) sign(p^c) I_{ij} \quad (3.33)$$

$\dot{\lambda}_4^c$  désigne le multiplicateur plastique sphérique cyclique, qui doit être positif.

La loi d'évolution suivie par la variable d'écrouissage  $r_4^c$  est pilotée par le même multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}_4^c$ . Comme introduit pour le degré de mobilisation monotone  $r_4^m$ , le degré de mobilisation cyclique respecte une expression équivalente pour son évolution :

$$\dot{r}_4^c = \dot{\lambda}_4^c I_4^c = \dot{\lambda}_4^c \frac{(1-r_4^c)^2}{2c_c} \frac{P_{ref}}{P_c(\epsilon_v^p)} \quad (3.34)$$

$c_c$  est un paramètre d'écrouissage positif. L'évolution  $\dot{r}_4^c$  doit toujours être positive et le degré de mobilisation doit toujours rester inférieur au degré de mobilisation monotone,  $r_4^c \leq r_4^m$  (condition également valable pour les mécanismes déviatoires).

Le facteur 1/2 de la relation 3.34 est issu d'une condition similaire à celle exprimée pour les mécanismes déviatoires monotones et cycliques (voir éq. 3.25).

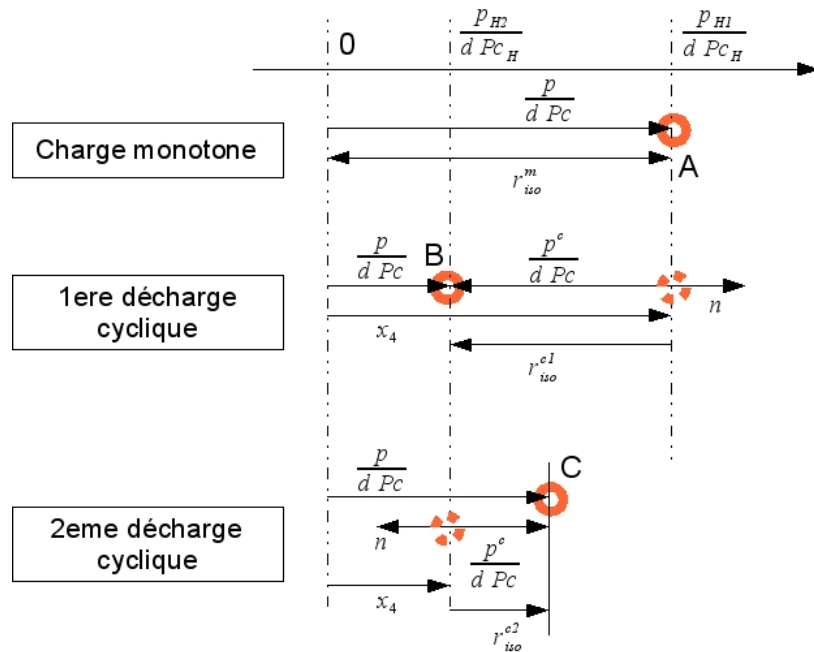


Illustration 3.4 : Évolution des surfaces de charge des mécanismes isotropes suivant un trajet de chargement aléatoire.

#### Commentaires sur l'illustration 3.4 :

La phase de charge monotone correspond à l'écrouissage isotrope du mécanisme isotrope monotone jusqu'au niveau de chargement  $P_{H_1}$  (point A).

La phase suivante correspond à une décharge conduisant à la création d'un mécanisme isotrope cyclique. La variable  $n$  permet d'indiquer s'il s'agit d'un mécanisme cyclique de « dé-compression » globale de l'échantillon ( $n=1$ ) ou bien de « re-compression » ( $n=-1$ ). Cette première décharge intervient jusqu'à atteindre la valeur  $P_{H_2}$  en contraintes isotropes totales (point B).

La troisième phase correspond à une « re-compression » de l'échantillon, où le mécanisme cyclique est défini par  $n, r_{iso}^{c2}, p_{H_2}$  (point C).

### 3.5 Traitement des états de traction

Même si le régime habituel de chargement du sol est la compression, il est possible de se trouver en état de traction, soit lors de l'intégration numérique du modèle, soit simplement au cours des itérations de résolution du système non linéaire des équations d'équilibre. Il est donc nécessaire de prévoir un comportement en traction. Il est ainsi proposé un mécanisme élasto-plastique parfait pour chaque plan de glissement  $k$ , avec une cohésion nulle.

Un critère est établi sur la pression de confinement  $p_k(\sigma)$  dans le plan  $k$  :

$$f_k^{tr}(\sigma) = p_k(\sigma) - p_0^{tr} \leq 0 \quad (3.35)$$

Avec  $p_0^{tr} = 10^{-5} |P_{ref}|$ .

La loi d'écoulement est associée :

$$(\dot{\epsilon}_k^{tr})_{ij}^p = \dot{\lambda}_k^{tr} (\Psi_k^{tr})_{ij} = \dot{\lambda}_k^{tr} \frac{1}{2} (I_k)_{ij} \quad (3.36)$$

Les déformations volumiques plastiques générées ne contribuent pas à l'évolution de la variable de couplage  $\epsilon_v^p$  des autres mécanismes du modèle.

Les mécanismes plastiques peuvent être considérés actifs simultanément aux mécanismes déviatoires du modèle.

### 3.6 Paramètres élastoplastiques du modèle

L'identification des différents paramètres du modèle est un enjeu essentiel pour la maîtrise du modèle, sa diffusion et son utilisation. Les travaux de Lopez-Caballero (2003a, 2007) ont contribué notamment à la mise en place d'une stratégie d'identification des différents paramètres du modèle. L'essentiel des matériaux étudiés et recalés avec le modèle sont issus de sols remaniés pour lesquels de nombreux résultats expérimentaux sont disponibles dans la littérature. Lopez-Caballero (2003a) s'intéressent particulièrement à la modélisation du comportement sismique des sols, tout en s'assurant de conserver une description précise des chargements monotones.

Le tableau 3.1 résume les paramètres utilisés dans le modèle de Hujeux. Ces paramètres sont classés selon leur rôle dans le modèle.

Modèle	Élasticité	Fonction de charge	Écrouissage	Domaines de comportement	État initial
Hujeux	$K_{ref}$ , $G_{ref}$ , $n_e$ , $P_{ref}$	$\phi_{pp}$ , $\beta$ , $b$ , $d$	$a_{mon}$ , $a_{cyc}$ , $\psi$ , $\alpha$ , $x_m$ , $c_{mon}$ , $c_{cyc}$	$r_{ela}^d$ , $r_{hys}$ , $r_{mob}$ , $r_{ela}^{iso}$	$P_{c0}$

**Tableau 3.1 : Paramètres du modèle de Hujeux (Lopez-Caballero, 2003a)**

Lopez-Caballero (2003a) et Modaressi (2003) proposent ensuite de classifier les différents paramètres selon leur rôle sur le comportement du sol (tableau 3.2). Ils identifient notamment trois catégories de paramètres : ceux qui contribuent à la rigidité du sol, ceux qui sont associés à un état indépendant de l'histoire du matériau et enfin ceux qui gèrent l'évolution des variables d'écrouissage. Finalement, selon leurs méthodes d'obtention, les paramètres peuvent être classés dans deux groupes distincts : un groupe relatif à ceux accessibles à partir des essais in-situ ou de laboratoire et un second groupe où les paramètres ne peuvent pas être mesurés directement.

	Rigidité	États	Écrouissage
Directement mesurables	Élasticité $(G, K)$ Plasticité $\beta$	$\phi_{pp}$ , $\psi$ , $d$ , $P_{c0}$	$r_{hys}$
Non directement mesurables	$a_{mon}$ , $a_{cyc}$	$b$	$\alpha$ , $x_m$ , $c_{mon}$ , $c_{cyc}$ , $r_{ela}^d$ , $r_{mob}$ , $r_{ela}^{iso}$

**Tableau 3.2 : Classification des paramètres du modèle de Hujeux (Modaressi, 2003)**

Une méthodologie d'identification des paramètres éprouvée est notamment présentée dans les travaux de Lopez-Caballero (2003a) et Modaressi (2003). Ils ont proposé et testé cette méthodologie sur différents matériaux sableux (Hostun RF, Toyoura, Monetry) et argileux (argile noire).

Le chapitre suivant s'attache à détailler l'algorithme mis en place pour intégrer numériquement le modèle de Hujeux présenté ci-dessus selon un schéma implicite dans le logiciel Code\_Aster.



## 4 Méthode d'intégration appliquée au modèle de Hujeux

4 Méthode d'intégration appliquée au modèle de Hujeux.....	57
4.1 Introduction.....	57
4.2 Intégration de l'équation constitutive non linéaire élastique.....	58
4.3 Intégration des équations constitutives élasto-plastiques.....	59
4.3.1 Domaine potentiel des mécanismes actifs.....	60
4.3.2 Prédiction élastique.....	63
4.3.3 Phase de correction : équations non linéaires à résoudre.....	65
4.3.3.1 Itérations de correction de Newton.....	65
4.3.3.2 Phase de mise à jour.....	67
4.3.3.3 Gestion des échecs d'intégration locale.....	67
4.3.3.4 Critère de convergence local.....	68
4.3.4 Contrôle de l'évolution.....	69
4.3.4.1 Multiplicateurs plastiques.....	69
4.3.4.2 Variables internes.....	69
4.3.5 Contrôle des mécanismes actifs.....	69
4.4 Tenseur élasto-plastique continu.....	75
4.5 Perspectives d'évolution.....	77

### 4.1 Introduction

Compte tenu des différents éléments présentés au §2.6 (notamment la stabilité au chargement sismique), l'algorithme d'intégration utilisé pour le modèle de Hujeux est la méthode implicite de projection du point le plus proche (CPPM). La formulation est établie à partir des travaux de Mialon (1983) et de Simo et Taylor (1985).

Picquezzu (1991) a par ailleurs étudié différents algorithmes d'intégration du modèle de Hujeux et préconise pour sa part l'utilisation d'un schéma explicite avec contrôle de l'évolution des contraintes et des variables d'écrouissage par sous-incrémentations. Il déconseille vivement d'utiliser la méthode de « Cutting Plane » au vu des résultats obtenus. La taille de discrétisations doit être très réduite due aux fortes non-linéarités présentes dans le modèle. Il s'est également intéressé à un schéma semi-implicite permettant de choisir un pas de discrétisation beaucoup plus grand, au prix d'une mise en œuvre qu'il qualifie de complexe. Cette qualité d'intégration a également un coût en termes d'effort de calcul.

Modaressi (2003) indique néanmoins qu'une intégration précise du modèle assure un fonctionnement correct du modèle et qu'une réponse locale plus précise peut conduire à un nombre d'itérations globales plus faible et ainsi compenser ce surcoût. Ces derniers points avancés nous conduisent à penser qu'un effort supplémentaire pour réaliser une intégration implicite du modèle assurera des qualités indéniables en termes de robustesse et de fiabilité du modèle, notamment pour des chargements conduisant le sol à des états instables tels que la liquéfaction.

Pour les paragraphes suivants, les indices + font référence aux valeurs des inconnues à l'état convergé après intégration locale du modèle. Les indices – font, quant à eux, référence aux valeurs des quantités concernées à l'état convergé

précédent.

## 4.2 Intégration de l'équation constitutive non linéaire élastique

Dans le cas d'une prédiction purement élastique (aucune évolution des variables d'écrouissage et des déformations plastiques), le nouvel état de contrainte vérifie seulement l'équation d'état suivante :

$$\sigma_{ij}^+ = \sigma_{ij}^- + A_{ijkl}(\sigma_{ij}^+) \Delta \epsilon_{kl} \quad (4.1)$$

Le tenseur caractérisant le comportement élastique non linéaire  $A_{ijkl}(\sigma_{ij}^+)$  est une fonction de l'état de contrainte s'exprimant sous la forme suivante :

$$A_{ijkl}(\sigma_{ij}^+) = A_{ijkl}^{ref} \left( \frac{P}{P_{ref}} \right)^{n_e} \quad (4.2)$$

$A_{ijkl}^{ref}$  est le tenseur élastique obtenu à la pression moyenne de référence  $P_{ref}$  (équation 3.10). L'équation non linéaire (4.1) est résolue par la méthode des sécantes. La méthode des sécantes est basée sur un algorithme de recherche du zéro d'une fonction. Cette approche est conduite pour une succession de droites, jusqu'à obtenir le niveau de précision souhaitée.

La prédiction élastique de l'état de contrainte établie en 4.1 peut être en dehors des limites du domaine d'élasticité du matériau. Il est alors nécessaire de distinguer les incréments de déformations élastiques et plastiques pour assurer à l'état de contrainte final  $\sigma_{ij}^+$  de rester sur les seuils des différentes surfaces de charge du modèle de Hujeux.

Dans le but d'établir un prédicteur élastique de « meilleure qualité »  $\sigma_{ij}^{\text{élas}}$  (éq. 4.3), la contribution de l'état de contraintes  $\sigma_{ij}^*$  défini à partir de 4.1 est atténuée par la prise en compte de l'état de contraintes précédent  $\sigma_{ij}^-$ . Cette approche permet notamment de limiter les problèmes de divergence de l'algorithme d'intégration locale intervenant par la suite (§4.3).

Il faut alors différencier l'état de contrainte issu de la prédiction élastique  $\sigma_{ij}^{\text{élas}}$  :

$$\sigma_{ij}^{\text{élas}} = \sigma_{ij}^- + A_{ijkl} \left( \frac{\sigma_{ij}^- + \sigma_{ij}^*}{2} \right) \Delta \epsilon_{kl} = \sigma_{ij}^- + \Delta \sigma_{ij}^{\text{élas}} \quad (4.3)$$

de l'état de contrainte final obtenu après prise en compte des écoulements plastiques et évolution des variables d'écrouissage du modèle :

$$\sigma_{ij}^+ = \sigma_{ij}^- + A_{ijkl}(\sigma_{ij}^+) \Delta \epsilon_{kl}^e \quad (4.4)$$

En règle général, le domaine élastique du modèle de Hujeux est de dimension très faible et les incréments de déformations sollicitent rapidement les algorithmes pré-

sentés ci-dessous (§4.3 ).

Un re-découpage de l'incrément de déformation  $\Delta\epsilon_{kl}$ , au niveau local, est introduit de façon à assurer une évolution contrôlée de l'état de contrainte sur la prédiction élastique. Ces critères portent sur les parties isotrope et déviatoire du tenseur de contrainte élastique prédit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{p(\sigma_{ij}^{elas}) - p(\sigma_{ij}^-)}{p(\sigma_{ij}^-)} \leq 5\% \\ \frac{q_k(\sigma_{ij}^{elas}) - q_k(\sigma_{ij}^-)}{q_k(\sigma_{ij}^-)} \leq 5\% \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Ce contrôle permet également d'éviter des divergences pouvant apparaître durant le processus de résolution locale ultérieur (§4.3 ).

### 4.3 Intégration des équations constitutives élasto-plastiques

L'ensemble des étapes nécessaires pour réaliser l'intégration implicite du modèle de Hujeux est présenté sur l'illustration 4.1.

L'algorithme mis en place résulte d'une part des travaux précédents en lien avec le modèle de Hujeux (Piccuezzi, 1991), mais aussi d'un processus d'améliorations successives issues du retour d'expérience accumulé lors de la mise en place des cas-tests de non régression du modèle dans le logiciel Code\_Aster.

Pour un incrément de déformations conduisant à un prédicteur élastique  $\tilde{\sigma}_{ij}^{elas}$  situé dans l'espace des contraintes et variables internes, en dehors des différentes surfaces de charges (§4.2 et §4.3.2 ), il convient de définir le domaine potentiel des mécanismes actifs,  $M^{pot}$  (§4.3.1 ). Ensuite, il est nécessaire de résoudre le système d'équations locales non linéaires, établi sur la base des mécanismes potentiellement actifs,  $M^{pot}$ . Après convergence, on réévalue l'ensemble des mécanismes réellement activés  $M^{act}$ , et s'il y a des différences avec  $M^{pot}$ , on reprend la résolution locale non linéaire avec  $M^{act}$ .



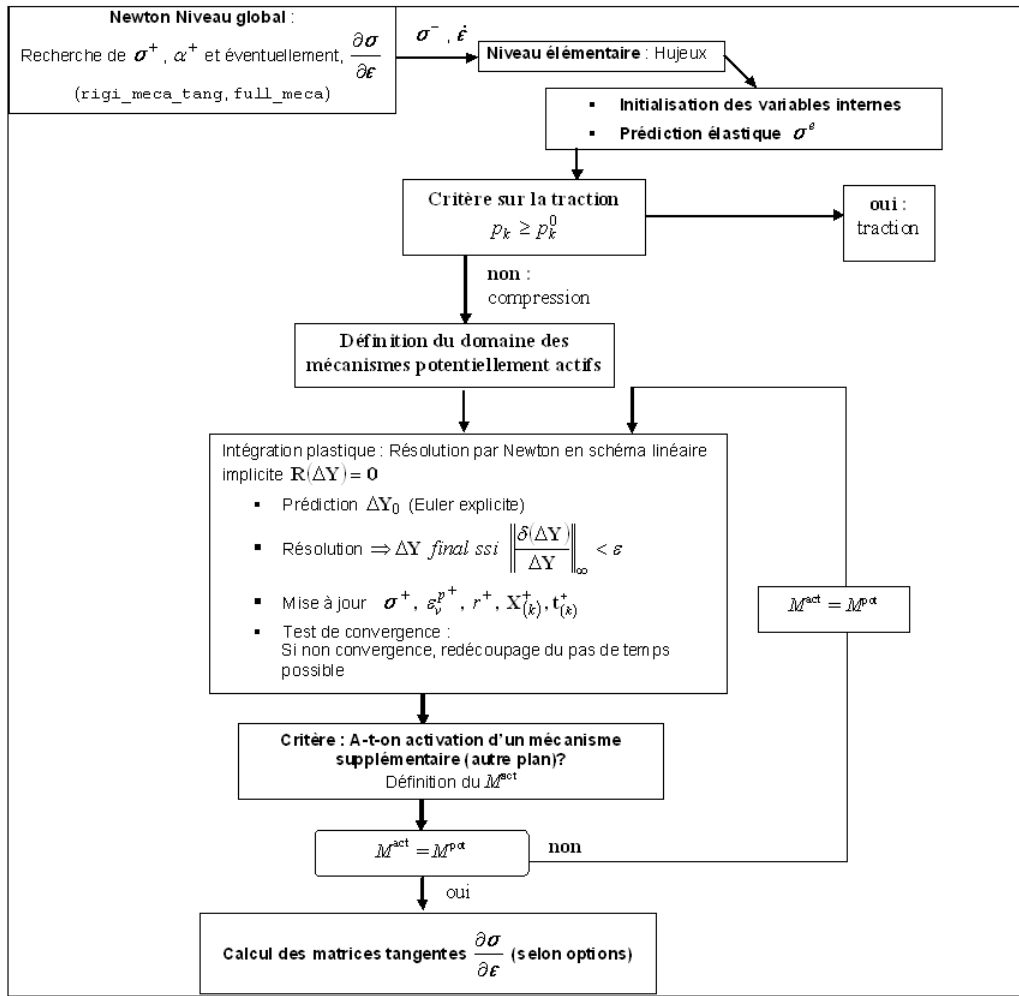


Illustration 4.1 : Schéma d'intégration implicite du modèle de Hujeux dans Code\_Aster

### 4.3.1 Domaine potentiel des mécanismes actifs

Les mécanismes élasto-plastiques  $M_k^K$ , pour  $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$  et  $K = [m, c]^3$ , sont activés ou inactivés selon le type de chargement suivi. Un domaine potentiel de mécanismes actifs,  $M^{pot}$ , est ainsi déterminé au début du pas courant à partir de l'état atteint précédemment.

Le choix initial des mécanismes potentiellement activés au démarrage du pas de temps considéré résulte de l'état mécanique convergé atteint à l'instant convergé précédent. Cet état mécanique est caractérisé par l'état d'activation des différents mécanismes (monotones ou cycliques) et les valeurs des variables  $\sigma_{ij}^-$  et  $\alpha_{ij}^-$ .

$\alpha_{ij}^-$  représente l'ensemble des variables d'écrouissage du modèle, propres à

- 2  $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  est l'indice qui permet de différencier les mécanismes. Pour  $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ , l'indice caractérise le mécanisme déviatoire dont la normale au plan de projection est portée par  $e_k$ . Pour  $k = 4$ , il s'agit des mécanismes isotropes.
- 3  $K = [m, c]$  est l'indice indiquant la différence entre les mécanismes monotones  $m$  et cycliques  $c$ .

chaque mécanisme, que ce soient les degrés de mobilisation  $(r_k^K)^-$ , la déformation volumique plastique  $(\epsilon_v^p)^-$  ou encore les variables d'histoire tensorielles  $(X_{ij}^H)^-$  et  $(t_{ij}^H)^-$  caractérisant les surfaces de charge des mécanismes cycliques, d'où

$$\alpha_{ij}^- = \left( (r_k^K)^-, (\epsilon_v^p)^-, (X_{ij}^H)^-, (t_{ij}^H)^- \right).$$

Pour caractériser l'état d'activation des différents mécanismes d'un état convergé, le domaine des mécanismes plastiques réellement activés est introduit et nommé  $M^{act}$  (§4.3.5).

La prédiction élastique établie en 4.1 permet d'établir une nouvelle estimation de  $M^{pot}$  à l'aide de l'évolution de  $\dot{f}_k^K$ , pour  $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  et  $K = [m, c]$ , et des seuils des mécanismes. Tous les éléments sont alors réunis pour définir les situations de chargement ou de déchargement pour chaque mécanisme.

$M^{pot}$  est initialisé à la valeur de  $(M^{act})^-$  et les variables d'histoire des mécanismes cycliques « pères » sont enregistrées. Pour tous les mécanismes  $M_k^K$ , deux grandeurs sont calculées pour aider à la construction de  $M^{pot}$  :

$$\begin{cases} c_k^K &= f_{k,\sigma}^K(\sigma_{ij}^{elas}) A_{ijmn} \Delta \epsilon_{mn} \\ g_k^K &= f_k^K(\sigma_{ij}^{elas}) \end{cases} \quad (4.6)$$

Pour les mécanismes cycliques  $M_k^c$ , la quantité  $c_k^m$  est également calculée pour le mécanisme monotone  $M_k^m$  associé. En cas d'échec du calcul pour l'évaluation de  $f_{k,\sigma}^K(\sigma_{ij}^{elas})$ , on établit la valeur de la dérivée de la fonction de charge à l'état de contraintes convergé précédent,  $\sigma_{ij}^-$ ,  $f_{k,\sigma}^K(\sigma_{ij}^-)$ .

Si  $c_k^m \geq 0$  et les surfaces de charge de  $M_k^c$  et  $M_k^m$  sont « proches », alors  $M^{pot} := M^{pot} \cup (M_k^m \setminus M_k^c)$  et les valeurs des variables d'écrouissage sont réinitialisées à l'état initial, notamment  $r_k^c = r_{ela}^c$ . Le critère de proximité entre les surfaces de charge monotone et cyclique est établi en calculant la différence entre le facteur de mobilisation atteint pour le seuil monotone  $r_k^m$  et la valeur du facteur de mobilisation à l'état convergé précédent  $r_k^c$ .

Tous les mécanismes possibles  $M_k^K$  sont ensuite passés en revue en testant les valeurs  $c_k^K$  et  $g_k^K$ . Les différentes situations sont les suivantes :

- $M_k^m \in M^{pot}$ . Alors, si  $c_k^m \geq 0$ ,  $M_k^m$  reste dans  $M^{pot}$  ; sinon, les variables d'histoire  $(X_{ij}^H)^+$  sont définies et si  $g_k^c < 0$  pour le mécanisme  $M_k^c$  associé à  $M_k^m$ ,  $M_k^c$  et  $M_k^m$  ne sont plus des éléments de

l'ensemble  $M^{pot}$ . En revanche, dans le cas où  $g_k^c \geq 0$ ,  $M_k^m$  est retiré de  $M^{pot}$  au profit de  $M_k^c$ .

- $M_k^m \notin M^{pot}$ . Alors, si  $c_k^m \geq 0$  et  $g_k^m \geq 0$ , alors  $M^{pot} := M^{pot} \cup \{M_k^m\}$ , mais si  $g_k^m < 0$ ,  $M_k^m$  n'est pas ajouté au domaine  $M^{pot}$ .
- $M_k^c \in M^{pot}$ . Alors, si  $c_k^c \geq 0$ ,  $M_k^c$  reste dans  $M^{pot}$ ; sinon, les variables d'histoire  $(X_{ij}^H)^+$  correspondantes à l'état convergé précédent sont mémorisées. Si  $g_k^c \geq 0$  pour  $M_k^c$  défini par  $(X_{ij}^H)^+$ ,  $M_k^c$  est maintenu dans  $M^{pot}$ . Dans le cas contraire, si  $g_k^c < 0$ ,  $M_k^c$  est retiré de  $M^{pot}$ .
- $M_k^c \notin M^{pot}$ . Alors, si  $c_k^c \geq 0$  et  $g_k^c \geq 0$ , alors  $M^{pot} := M^{pot} \cup \{M_k^c\}$ . L'éventualité de micro-décharges pour les mécanismes déviatoires doit néanmoins être considérée. On teste pour cette éventualité le seuil du mécanisme « père » de  $M_k^c$  : si  $g_k^c \geq 0$ , alors le mécanisme « fils » n'a plus lieu d'être considéré et ce mécanisme « fils » est remplacé dans  $M^{pot}$  par le mécanisme « père », en s'assurant d'attribuer aux variables d'histoire  $(X_{ij}^H)^+$  les propriétés de ce dit mécanisme « père ».

Si, au terme de l'analyse précédente, aucun mécanisme ne subsiste dans  $M^{pot}$ , le régime est alors considéré élastique, c'est à dire le régime élastique apparaît lorsqu'aucun mécanisme n'est activé.

### Remarque :

Dans le cadre des modèles de comportement à mécanismes multiples couplés, les conditions de charge/décharge des différents mécanismes ne peuvent pas être établies à partir des conditions de Kuhn-Tucker (§2.3.6). Pour un incrément de déformation donné, ces conditions ne sont pas suffisantes pour déterminer les mécanismes réellement actifs. La liste suivante donne des exemples de situation éventuelle, que l'algorithme local doit pouvoir gérer :

- Si seulement une surface de charge est active (c'est à dire  $\Delta \lambda_k^K > 0$ ), alors la condition  $c_k^K \geq 0$  implique nécessairement  $\Delta \lambda_k^K > 0$ , c'est à dire que le mécanisme  $M_k^K$  est le seul mécanisme actif ;
- Si plusieurs surfaces de charge sont actives, alors  $c_k^K \geq 0$  n'implique pas nécessairement que  $\Delta \lambda_k^K > 0$ . En effet, on peut avoir  $g_k^K(\sigma_{ij}^- + \Delta \sigma_{ij}^{elas}) \geq 0$  mais  $g_k^K(\sigma_{ij}^+) < 0$ . Pour une illustration géométrique de cet exemple, se référer aux travaux de Simo et al. (1988).
- De même, si plusieurs surfaces de charge sont actives, alors la condition



$\eta$  est calculé afin d'assurer  $\tilde{p}_k^{elas} \leq 10^{-6} P_{ref}$ .  $\tilde{Y}_\epsilon = (\tilde{\sigma}_{ij}^{elas}, (\epsilon_v^p)^-, (r_k^K)^-, 0)$  correspond au prédicteur initial nécessaire à la résolution du système non linéaire local. Cette restriction permet d'assurer de respecter les domaines de définition des termes de la matrice jacobienne.

Ahadi et Krenk (2003) ont également recours à une étape de conditionnement pour proscrire les états de traction issus du prédicteur élastique. Ils travaillent dans le plan des contraintes principales. Les états modifiés sont soumis à une translation le long de l'axe hydrostatique et une diminution de leurs valeurs sur leurs composantes déviatoires.

La solution d'essai explicite  $(\Delta \lambda_k^K)_0$  est obtenue à partir du domaine  $M^{pot}$ , en résolvant les équations linéarisées autour de l'état sans évolution plastique  $\tilde{\sigma}_{ij}^{elas}$  :

$$\left( \frac{\partial f_k^K}{\partial (\Delta \lambda_l^L)} \right)_{\tilde{Y}_\epsilon} (\Delta \lambda_l^L)_0 = -f_k^K(\tilde{\sigma}_{ij}^{elas}, (\epsilon_v^p)^-, (r_k^K)^-) \quad (4.8)$$

avec

$$\left( \frac{\partial f_k^K}{\partial (\Delta \lambda_l^L)} \right)_{\tilde{Y}_\epsilon} = - \left( \frac{\partial f_k^K}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{\tilde{Y}_\epsilon} A_{ijrs} (\tilde{\sigma}_{ij}^{elas}) (\Psi_l^L)^-_{rs} + \left( \frac{\partial f_k^K}{\partial \epsilon_v^p} \right)_{\tilde{Y}_\epsilon} (\Psi_l^L)^-_{rs} I_{rs} + \left( \frac{\partial f_k^K}{\partial r_l^K} \right)_{\tilde{Y}_\epsilon} (l_l^K)^- \delta_{kl} \quad (4.9)$$

L'écriture du modèle de Hujeux original ne peut pas admettre plus de quatre mécanismes plastiques actifs simultanément.

A partir de l'équation 4.8, l'expression des incréments des multiplicateurs plastiques peut être obtenue comme suit :

$$(\Delta \lambda_l^K)_0 = \frac{-f_k^K(\tilde{\sigma}_{ij}^{elas}, (\epsilon_v^p)^-, (r_k^K)^-)}{\left( \frac{\partial f_k^K}{\partial (\Delta \lambda_l^L)} \right)_{\tilde{Y}_\epsilon}} \quad (4.10)$$

Le calcul des évolutions des inconnues locales s'effectue ensuite comme suit :

$$\begin{cases} (\Delta \sigma_{ij})_0 &= \sigma_{ij}^- + A_{ijrs} (\tilde{\sigma}_{ij}^{elas}) \left( \Delta \epsilon_{rs} - \sum_k (\Delta \lambda_k^K)_0 (\Psi_k^K)^-_{rs} \right) \\ (\Delta \epsilon_v^p)_0 &= \sum_k (\Delta \lambda_k^K)_0 (\Psi_k^K)^-_{mn} I_{mn}, \quad K \in [m, c] \\ (\Delta r_k^K)_0 &= (\Delta \lambda_k^K)_0 (l_k^K)^- \end{cases} \quad (4.11)$$

On impose de plus que :

- $(\Delta \lambda_k^K)_0 \geq 0$ ,
- Les facteurs de mobilisation sont bornés sur la solution d'essai :

- $\left( \left( r_k^m \right)^- + \left( \Delta r_k^m \right)_0 \right) \leq 1$  ,
- $\left( \left( r_k^c \right)^- + \left( \Delta r_k^c \right)_0 \right) \leq \left( r_k^m \right)^-$  ,

de façon à assurer la vraisemblance des évolutions des variables internes.

Le vecteur solution estimé après la prédiction d'Euler s'exprime finalement comme suit :

$$Y_0 = \tilde{Y}_e + \Delta Y_0 \quad (4.12)$$

Il est composé des inconnues suivantes du problème non linéaire local :

$$Y_0 = \left( \left( \sigma_{ij} \right)_0, \left( \epsilon_v^p \right)_0, \left( r_k^K \right)_0, \left( \Delta \lambda_k^K \right)_0 \right) \quad (4.13)$$

avec

$$\begin{cases} \left( \sigma_{ij} \right)_0 &= \sigma_{ij}^- + \left( \Delta \sigma_{ij} \right)_0 \\ \left( \epsilon_v^p \right)_0 &= \left( \epsilon_v^p \right)^- + \left( \Delta \epsilon_v^p \right)_0 \\ \left( r_k^K \right)_0 &= \left( r_k^K \right)^- + \left( \Delta r_k^K \right)_0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Le nombre total d'inconnues du vecteur solution  $Y_0$  peut être au maximum de quinze : six pour les composantes du tenseur de contrainte, une pour la déformation volumique plastique, les différents degrés de mobilisation associés aux mécanismes actifs (limités à quatre) et finalement les multiplicateurs plastiques associés aux mécanismes actifs (également limités à quatre).

### 4.3.3 Phase de correction : équations non linéaires à résoudre

#### 4.3.3.1 Itérations de correction de Newton

Les itérations de correction de Newton consistent à résoudre les équations suivantes simultanément, pour  $\Delta \epsilon_{kl}$  donné :

- Loi d'état incrémentale d'élasticité non linéaire, notée  $(\mathbf{LE})_{ij}$  :

$$\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^- - A_{ijkl} \left( \sigma_{ij}^+ \right) \left( \Delta \epsilon_{kl} - \Delta \epsilon_{kl}^p \right) = 0 \quad (4.15)$$

- Évolution incrémentale de la variable de couplage  $\epsilon_v^p$  ,  $(\mathbf{LEVP})$  :

$$\left( \epsilon_v^p \right)^+ - \left( \epsilon_v^p \right)^- - \sum_{k \in [1,4]} \Delta \lambda_k^K \left( \Psi_k^K \right)_{ij} I_{ij} = 0 \quad , \quad K \in [m, c] \quad (4.16)$$

- Évolution incrémentale des facteurs de mobilisation  $r_k^K$  ,  $(\mathbf{LR}_k^K)$  :

$$\left( r_k^K \right)^+ - \left( r_k^K \right)^- - \Delta \lambda_k^K I_k^K = 0 \quad (4.17)$$

- Équations des surfaces de charge  $f_k^K$ ,  $(\mathbf{LF}_k^K)$  :

$$f_k^K = 0 \quad (4.18)$$

L'intégration locale du modèle consiste à résoudre le système carré  $R(\Delta Y) = 0$ , avec  $\Delta Y = (\Delta \sigma_{ij}, \Delta \epsilon_v^p, \Delta r_k^K, \Delta(\Delta \lambda_k^K))$  et  $R = (\mathbf{LE}_{ij}, \mathbf{LEVP}, \mathbf{LR}_k^K, \mathbf{LF}_k^K)$ .

On résout de manière implicite le système  $R(\Delta Y) = 0$  par une méthode de Newton, pour  $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$  et  $K = [m, c]$ .

A l'itération  $j$  de la boucle de correction locale de Newton, on résout l'équation matricielle :

$$\left( \frac{dR}{d\Delta Y} \right)_{\Delta Y_j} \delta \Delta Y_{j+1} = -R(\Delta Y_j) \quad (4.19)$$

où la matrice tangente  $\left( \frac{dR}{d\Delta Y} \right)_{\Delta Y_j}$ , non symétrique, est calculée de la manière présentée en annexe 9.2 (p.197) :

$$\left( \frac{dR}{d(\Delta Y)} \right)_{\Delta Y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial \sigma_{rs}} & \frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial \epsilon_v^p E_{ref}} & \frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial r_k^K P_{ref}} & \frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial (\Delta \lambda_k^K) E_{ref}} \\ \frac{\partial \mathbf{LEVP} E_{ref}}{\partial \sigma_{rs}} & \frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial \epsilon_v^p} & \frac{\partial \mathbf{LEVP} E_{ref}}{\partial r_k^K P_{ref}} & \frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial (\Delta \lambda_k^K)} \\ \frac{\partial \mathbf{LR}_k^K P_{ref}}{\partial \sigma_{rs}} & \frac{\partial \mathbf{LR}_k^K P_{ref}}{\partial \epsilon_v^p E_{ref}} & \frac{\partial \mathbf{LR}_k^K}{\partial r_k^K} & \frac{\partial \mathbf{LR}_k^K P_{ref}}{\partial (\Delta \lambda_k^K) E_{ref}} \\ \frac{\partial \mathbf{LF}_k^K}{\partial \sigma_{rs}} & \frac{\partial \mathbf{LF}_k^K}{\partial \epsilon_v^p E_{ref}} & \frac{\partial \mathbf{LF}_k^K}{\partial r_k^K P_{ref}} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Le système est conditionné dans le but d'assurer à chaque variable du système la dimension des multiplicateurs plastiques  $\Delta \lambda_k^K$  et à chaque équation celle de l'équation 4.16  $(\mathbf{LEVP})$ . Ce choix permet d'avoir des équations du même ordre de grandeur, donc d'assurer une convergence plus « uniforme » sur l'ensemble du système.

**Remarque :**

- Le déterminant de la matrice tangente  $\left( \frac{dR}{d\Delta Y} \right)_{\Delta Y_j}$  est a priori positif en phase d'écrouissage positif. Cependant, il pourrait devenir négatif. Aucun

traitement particulier n'a pour l'instant été initié pour observer ce phénomène.

- Il est à noter que dans cette phase de corrections plastiques, les valeurs négatives des multiplicateurs plastiques sont acceptées. Ces corrections n'ont aucune relation avec la notion de charge – décharge des seuils élastoplastiques.

#### 4.3.3.2 Phase de mise à jour

Après résolution, on met à jour le vecteur solution :

$$\begin{cases} \Delta Y_{j+1} &= \Delta Y_j + \delta \Delta Y_{j+1} \\ Y_{j+1} &= \tilde{Y}_e + \Delta Y_{j+1} \end{cases} \quad (4.21)$$

Le candidat  $Y_{j+1}$  est alors testé par rapport au critère de convergence local (§4.3.3.4).

#### 4.3.3.3 Gestion des échecs d'intégration locale

Les actions menées, décrites ci-dessous, interviennent en cas d'échec de l'algorithme de Newton local (§4.3.3). Toute modification apportée à  $M^{pot}$  conduit nécessairement à reprendre l'intégration locale avec le nouveau domaine  $M^{pot}$ . Ce processus de mise à jour de  $M^{pot}$  est toutefois limité à cinq tentatives, faute de quoi le modèle de comportement renvoie un indicateur d'échec au niveau global.

- Les premiers cas traités s'intéressent après chaque itération de l'algorithme de Newton au risque de chevauchement de deux surfaces de charge déviatoires cyclique et monotone ou cyclique et cyclique dans l'espace des contraintes et variables internes. Ces phénomènes sont détectés via des tests de proximité entre la position de l'état actuel à la  $j^{ème}$  itération (état défini par son état de contraintes et valeurs des variables internes) et la surface de charge mise en cause en cas de chevauchement.
  - Pour le cas particulier des deux surfaces de charge déviatoires cyclique et monotone, si la proximité est établie, le mécanisme monotone  $M_k^m$  est ajouté directement au domaine  $M^{pot}$  tout en retirant le mécanisme cyclique tangent  $M_k^c$ .
  - Pour les cas de proximité de deux surfaces de charge déviatoires cycliques « père » et « fils », le critère de proximité porte sur la position de l'état actuel par rapport à la position de l'état mémoire caractérisant le point de création de la surface de charge « fils ». Cet état mémoire est un point de tangence entre les surfaces de charge « père » et « fils ». Si la proximité est établie, le mécanisme « fils » est retiré de  $M^{pot}$  pour ensuite y ajouter le mécanisme « père ».



- D'autres échecs peuvent se produire durant l'algorithme de Newton local, notamment l'apparition d'états de contrainte de traction.
  - Si un état de traction est détecté après échec local, pour tout multiplicateur plastique, associé à un mécanisme déviatoire, négatif après le tir explicite d'Euler (§4.3.2),  $(\Delta \lambda_k^K)_0$ , le mécanisme déviatoire est retiré de  $M^{pot}$ .
  - Si tous les multiplicateurs plastiques sont positifs après le tir explicite d'Euler, c'est à dire  $(\Delta \lambda_k^K)_0 \geq 0$ , alors une solution heuristique consiste à retirer l'ensemble des mécanismes déviatoires présents dans  $M^{pot}$ , pour obtenir un nouveau prédicteur après actualisation de  $M^{act}$  (§4.3.5).
- Pour les cas différents de ceux présentés ci-dessus, une autre approche heuristique a été mise en place pour gérer ce problème d'échec d'intégration locale. On regarde la valeur maximale de  $R(\Delta Y_j)$ . Si cette valeur maximale est portée par une loi d'évolution d'un mécanisme déviatoire cyclique  $M_k^c$ , alors le mécanisme en question est retiré de  $M^{pot}$ .
- La dernière tentative heuristique s'attache à contrôler la présence de mécanismes déviatoires cycliques vierges. Si c'est le cas, ces mécanismes sont retirés de  $M^{pot}$ .

Si aucun des traitements spécifiques décrits ci-dessus n'a été sollicité, la non-convergence locale du modèle est supposée et cette information est renvoyée à l'algorithme d'intégration globale de l'équilibre non linéaire.

#### 4.3.3.4 Critère de convergence local

La convergence est réputée acquise dès lors que :

$$\|R(\Delta Y_{j+1})\| = \sqrt{\sum_i (R(\Delta Y_{j+1}))^2} \leq \mu \quad (4.22)$$

La norme  $\| \cdot \|$  sur le résidu utilise aussi la mise à l'échelle des divers termes intervenants. Dès lors que la convergence est acquise, le candidat  $Y_{j+1}$  deviendra l'état convergé  $Y^+$  à condition de respecter les critères d'évolution (§4.3.4) et après s'être assuré que le domaine des mécanismes réellement actifs  $M^{act}$  (§4.3.5) correspond au domaine des mécanismes potentiellement actifs  $M^{pot}$ . Le paramètre  $\mu$  est donné par l'utilisateur. Sa valeur par défaut est fixée à  $\mu = 10^{-6}$ .

### 4.3.4 Contrôle de l'évolution

#### 4.3.4.1 Multiplicateurs plastiques

Après convergence de l'algorithme local de Newton, il faut s'assurer de la positivité des multiplicateurs plastiques  $(\Delta \lambda_k^K)^+$ . Pour des valeurs négatives de  $(\Delta \lambda_k^K)^+$ , avant l'option conduisant à stipuler le déchargement du mécanisme  $M_k^K$ , un ratio (éq. 4.23) est calculé entre la valeur du multiplicateur plastique et la valeur maximale des multiplicateurs plastiques supposés actifs. Si ce ratio a une valeur inférieure en valeur absolue à une tolérance fixée par l'utilisateur,  $\nu$  (proche de  $10^{-6}$ ), le mécanisme  $M_k^K$  est considéré être en chargement « neutre » et on impose  $(\Delta \lambda_k^K)^+ = 0$  pour le mécanisme  $M_k^K$ .

$$\frac{|\Delta \lambda_k^K|}{\text{Max}_{k=1,4}(\Delta \lambda_k^K, \nu)} \leq \nu \quad (4.23)$$

#### 4.3.4.2 Variables internes

Les valeurs pour l'état convergé obtenu pour les facteurs de mobilisation doivent vérifier un intervalle de valeurs cohérent avec le modèle :

$$\begin{cases} (r_k^m)^+ \leq 1 \\ (r_k^c)^+ \leq (r_k^m)^+ \end{cases} \quad (4.24)$$

Une règle pour l'évolution des facteurs de mobilisation et la déformation volumique plastique a également été mise en place pour garantir la précision des résultats obtenus :

$$\begin{cases} \frac{(r_k^K)^+ - (r_k^K)^-}{(r_k^K)^-} \leq 10\% \\ \frac{(\epsilon_v^p)^+ - (\epsilon_v^p)^-}{\text{Max}(|(\epsilon_v^p)^+|, \nu)} \leq 10\% \end{cases} \quad (4.25)$$

Le paramètre  $\nu$  est le même que celui introduit dans l'expression 4.23. Pour des incréments de déformation générant des évolutions supérieures à cette règle, un processus de re-découpage local est appliqué pour garantir la précision des résultats.

### 4.3.5 Contrôle des mécanismes actifs

On décrit dans ce paragraphe la gestion de l'activation effective des mécanismes plastiques.

Simo et al. (1988) proposent deux approches différentes pour déterminer les mécanismes réellement actifs. La première méthode consiste à résoudre le système local à partir de  $M^{pot}$  jusqu'à convergence, puis de vérifier la positivité des multiplicateurs plastiques de tous les mécanismes de  $M^{pot}$ . Pour toutes les itérations de correction plastique de cette approche, le domaine  $M^{pot}$  reste fixé. La deuxième approche permet, quant à elle, de modifier  $M^{pot}$  au cours des itérations de correction de Newton. Le signe des multiplicateurs plastiques est vérifié à chaque itération. A une itération donnée, si le multiplicateur plastique relatif à un mécanisme est négatif, alors ce mécanisme est retiré de  $M^{pot}$  et la procédure de résolution est réinitialisée.

A l'inverse du choix de Simo et al. (1988), l'algorithme choisi ici pour contrôler les mécanismes actifs pour l'intégration de Hujoux a été la première solution proposée. Il paraît plus facile à implanter et n'impose aucune condition supplémentaire sur les valeurs obtenues par les itérés successifs. En revanche, il est sûr que la seconde approche garantit d'obtenir une convergence monotone du système.

Après convergence du système d'équations locales non linéaire, on vérifie l'ensemble des mécanismes réellement actifs  $M^{act}$  selon la procédure suivante, en partant de la prédiction de  $M^{pot}$  (cf illustration 4.6 page 75).

L'arbre de décision mis en place est un élément constitutif du modèle de Hujoux, puisqu'il décrit l'enchaînement des mécanismes cycliques et les enregistrements des variables « mémoires » discrètes et les éventuelles restaurations des variables d'écrouissage. La méthodologie mise en place pour construire le domaine  $M^{act}$  est reliée directement au schéma d'intégration implicite du modèle. Cet arbre de décision ne peut pas être translaté directement à un schéma d'intégration explicite puisqu'il est construit en supposant un état de contraintes admissible, c'est à dire  $\forall (k, K), f_k^K(\sigma_k, r_k^K, \epsilon_v^p) \leq 0$ .

La liste d'actions suivante présente l'algorithme mis en place, qui passe en revue tous les mécanismes. Toute modification de  $M^{act}$  conduira à reprendre une nouvelle résolution locale non linéaire (§4.3) :

**1. Cas d'un mécanisme déviatoire monotone actif  $M_k^m$  avec  $\Delta\lambda_k^m < 0$  :**

1.1. Si  $r_k^m = r_{ela}^d$ , alors ce mécanisme  $M_k^m$  est désactivé :  
 $M^{act} := M^{act} \setminus \{M_k^m\}$  ;

1.2. Sinon (remise en cause de l'estimation faite dans  $M^{pot}$ ) (illustration 4.3) :

1.2.1. S'il existait un mécanisme cyclique préalablement à l'étape de création de  $M^{pot}$ , le mécanisme cyclique  $M_k^c$  est restauré mais déclaré inactif (non pris en compte dans  $M^{act}$ ), tandis que le mécanisme monotone  $M_k^m$  est retiré :  $M^{act} := M^{act} \setminus \{M_k^m\}$  ;

1.2.2. S'il n'existait pas de mécanisme cyclique, on crée un mécanisme

cyclique  $M_k^c$  à partir de l'état convergé précédent et on enlève  $M_k^m$  de  $M^{act}$  :  $M^{act} := M^{act} \setminus \{M_k^m\}$  ;

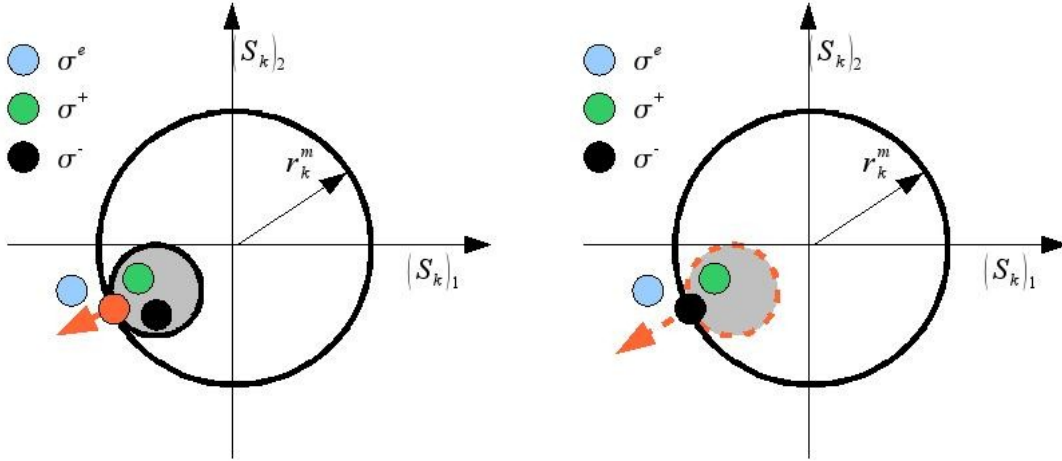


Illustration 4.3 : Gestion des mécanismes pour la constitution du domaine des mécanismes plastiques activés  $M^{act}$  : cas 1.2.1 ; cas 1.2.2

## 2. Cas d'un mécanisme isotrope monotone $M_4^m$ actif avec $\Delta \lambda_4^m < 0$ :

2.1. Si  $r_4^m = r_{\text{éla}}^s$ , alors  $M_4^m$  est retiré de  $M^{act}$  :  $M^{act} := M^{act} \setminus \{M_4^m\}$  ;

2.2. Sinon :

2.2.1. S'il existait un mécanisme cyclique  $M_4^c$  préalablement à l'étape de  $M^{pot}$ , le mécanisme cyclique  $M_4^c$  est restauré mais déclaré inactif (non pris en compte dans  $M^{act}$ ), tandis que le mécanisme monotone  $M_4^m$  est retiré :  $M^{act} := M^{act} \setminus \{M_4^m\}$  ;

2.2.2. S'il n'existait pas de mécanisme cyclique, un mécanisme cyclique est créé à condition que  $\frac{|p^+| - |p^-|}{d|P_c|} < 0$  (on rappelle que  $P_c$  dépend de  $\epsilon_v^p$ , variable de couplage de l'ensemble des mécanismes). Dans ce cas, le mécanisme  $M_4^m$  est retiré de  $M^{act}$ .

## 3. Cas d'un mécanisme déviatoire monotone $M_k^m$ inactif : Si le seuil $f_k^m(\sigma^+, \alpha^+) \geq 0$ , alors ce mécanisme devient actif : $M^{act} := M^{act} \cup \{M_k^m\}$ , et les variables internes associées au mécanisme cyclique actif $M_k^c$ prennent des valeurs initiales vierges.

## 4. Cas d'un mécanisme isotrope monotone $M_4^m$ créé mais inactif : Si le seuil $f_4^m(\sigma^+, \alpha^+) \geq 0$ , alors ce mécanisme devient actif :

$M^{act} := M^{act} \cup \{M_4^m\}$  ; si le seuil  $f_4^m(\sigma^+, \alpha^+) < 0$ , alors, si  $\frac{|p^+ - p^-|}{d|P_c|} < 0$ ,

on définit un mécanisme cyclique  $M_4^c$  et on retire  $M_4^m$ .

**5. Cas d'un mécanisme cyclique  $M_k^c$  créé auparavant dans  $M^{pot}$  suite au déchargement d'un mécanisme monotone  $M_k^m$  :**

5.1. Si  $\Delta \lambda_k^c < 0$  , le mécanisme  $M_k^c$  est retiré de  $M^{act}$  :

$$M^{act} := M^{act} \setminus \{M_k^c\} ;$$

5.2. Si le seuil du mécanisme  $M_k^m$  est positif,  $f_k^m(\sigma^+, \alpha^+) \geq 0$  alors :

5.2.1. Pour un mécanisme déviatoire, on active  $M_k^m$  :

$$M^{act} := M^{act} \setminus \{M_k^c\} \cup \{M_k^m\} \text{ et le mécanisme cyclique reprend des valeurs initiales vierges pour ses variables internes.}$$

5.2.2. Pour un mécanisme isotrope : si le mécanisme cyclique  $M_k^c$  a été modifié suite à l'étape de création de  $M^{pot}$  , le mécanisme cyclique défini avant  $M^{pot}$  est restauré ; sinon, le mécanisme monotone  $M_k^m$  est activé :  $M^{act} := M^{act} \setminus \{M_k^c\} \cup \{M_k^m\}$  et le mécanisme cyclique reprend des valeurs initiales vierges pour ses variables internes.

5.3. S'il s'agit d'un mécanisme déviatoire cyclique  $M_k^c$  déclaré actif dans  $M^{pot}$  , on contrôle le non-chevauchement de la surface de charge cyclique avec la surface de charge monotone. On calcule la position absolue normée du centre de la surface de charge cyclique

$$C_k^c = \|X_k^H + t_k^H r_k^c\| \text{ à laquelle on ajoute le rayon du cercle de la surface de charge cyclique } r_k^c . \text{ Cette valeur est testée par rapport au rayon de}$$

la surface monotone  $r_k^m$  . Si  $\frac{(C_k^c + r_k^c) - r_k^m}{r_k^m} \geq 0$  , il y a chevauchement

des surfaces. Il est nécessaire de modifier la surface de charge cyclique en restaurant la surface de charge cyclique « père » de la surface actuellement active.

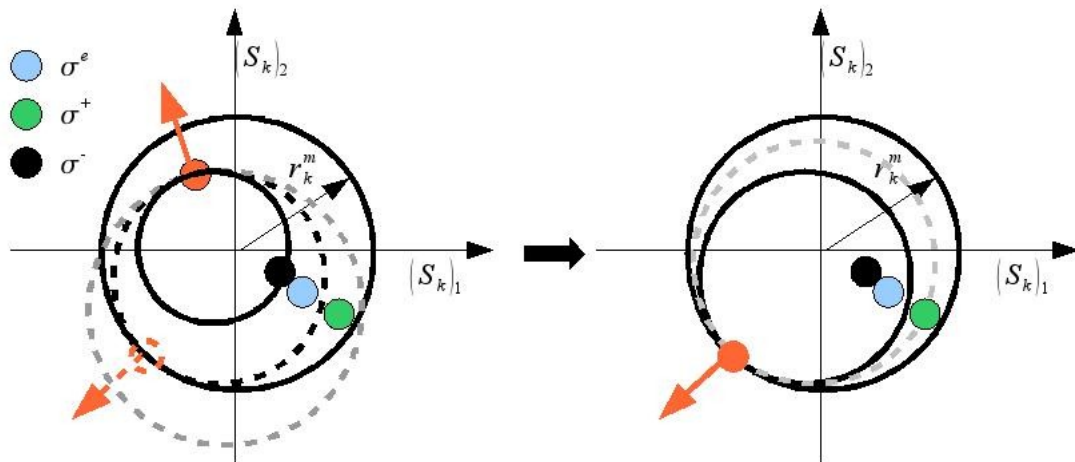


Illustration 4.4 : Cas 5.3 – Restauration de la surface de charge du mécanisme déviatoire cyclique « père » pour empêcher le chevauchement des surfaces de charge

5.4. S'il s'agit d'un mécanisme cyclique  $M_k^c$  déclaré inactif dans  $M^{pot}$  ,

alors :

5.4.1. Pour un mécanisme déviatoire cyclique  $M_k^c$  :

5.4.1.1. Si le seuil  $f_k^c(\sigma^+, \alpha^+) \geq 0$  alors  $M_k^c$  est déclaré actif et :

1. Si ce mécanisme cyclique est « fils » d'un autre mécanisme cyclique, alors si le seuil du mécanisme « père »  $f_{(k, \text{père})}^c(\sigma^+, \alpha^+) \geq 0$  est également violé, c'est le mécanisme « père » qui est ajouté à  $M^{act}$  ;

5.4.1.2. Si la procédure de construction de  $M^{pot}$  a modifié une surface de charge cyclique déjà existante et si, après intégration

locale, la condition  $t_k^H \left( X_k^H - \frac{S_k^c}{p_k F(p_k, \epsilon_v^p)} \right) \geq 0$  est respectée,

alors la modification avancée pour la construction de  $M^{pot}$  n'avait pas lieu d'être. Le mécanisme cyclique « père » doit être restauré. Si de plus,  $f_{(k, \text{père})}^c(\sigma^+, \alpha^+) \geq 0$ , le mécanisme est ajouté à  $M^{act}$ .

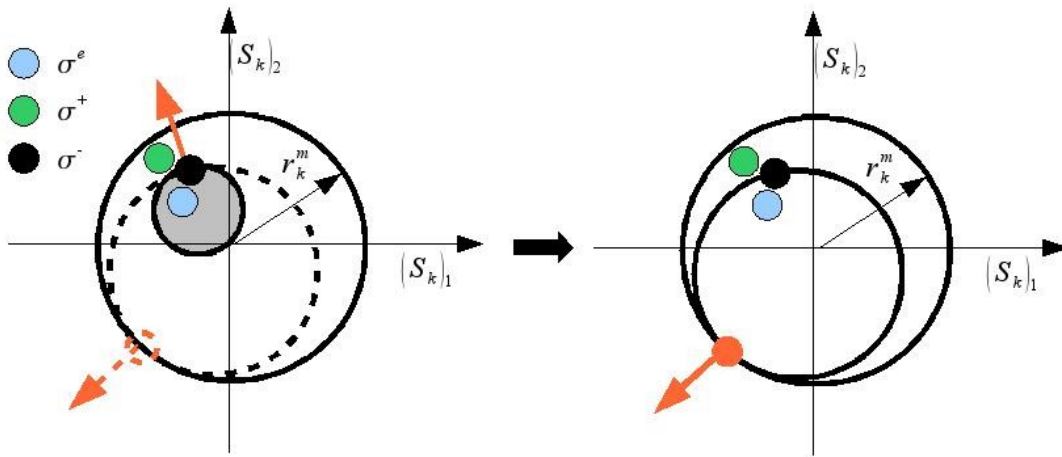


Illustration 4.5 : Cas 5.4.1.2 : Restauration du mécanisme cyclique père

5.4.1.3. Si la condition  $t_k^H \left( X_k^H - \frac{S_k^c}{p_k F(p_k, \epsilon_v^p)} \right) \geq 0$  est vérifiée pour

un mécanisme cyclique dont le mécanisme « père » est le mécanisme monotone, le mécanisme monotone  $M_k^m$  doit être activé ;

5.4.1.4. Si le mécanisme cyclique  $M_k^c$  inactif était déjà écroui à l'état convergé  $(\sigma^-, \alpha^-)$ , alors un mécanisme cyclique « fils » doit être créé à l'état inactif pour l'état convergé  $(\sigma^+, \alpha^+)$ .

5.4.2. Pour un mécanisme isotrope cyclique  $M_4^c$  :

5.4.2.1. Si  $\left(\frac{|(p)|}{d|(P_c)|}\right)^+ \leq \left(\frac{|(p)|}{d|(P_c)|}\right)^-$  et si le mécanisme cyclique s'écrouit pour des chargements d'extension : si  $f_4^c(\sigma^+, \alpha^+) \geq 0$ , alors  $M_4^c$  est déclaré actif. Sinon, le mécanisme  $M_4^c$  reprend les valeurs des variables « mémoires » établies avant la création du  $M^{pot}$ . Si  $M_4^c$  n'était pas défini à l'état  $(\sigma^-, \alpha^-)$ , alors le mécanisme isotrope monotone  $M_4^m$  est également désactivé.

5.4.2.2. Si  $\left(\frac{|(p)|}{d|(P_c)|}\right)^+ \geq \left(\frac{|(p)|}{d|(P_c)|}\right)^-$  et si le mécanisme s'écrouit pour des chargements de compression : si  $f_4^c(\sigma^+, \alpha^+) \geq 0$ , alors  $M_4^c$  est déclaré actif. Sinon, les variables mémoratrices reprennent les valeurs antérieures établies à l'état  $(\sigma^-, \alpha^-)$ .

5.4.2.3. Si  $\left(\frac{|(p)|}{d|(P_c)|}\right)^+ \geq \left(\frac{|(p)|}{d|(P_c)|}\right)^-$  et si le mécanisme s'écrouit pour des chargements d'extension :

1. Si la création du mécanisme est intervenue lors de la création de  $M^{pot}$ , le mécanisme cyclique reprend les valeurs établies précédemment pour l'état  $(\sigma^-, \alpha^-)$ . Si  $f_4^c(\sigma^+, \alpha^-) \geq 0$ , alors le mécanisme  $M_4^c$  est déclaré actif, à condition que le mécanisme cyclique existe à cet état. Sinon, le mécanisme monotone  $M_4^m$  est déclaré inactif également.
2. S'il n'y a pas eu de création d'un nouveau mécanisme cyclique isotrope dans  $M^{pot}$ , alors on modifie les variables « mémoires » de  $M_4^c$  temporairement à partir de  $(\sigma^-, \alpha^-)$ . De plus, si  $f_4^c(\sigma^+, \alpha^+) \geq 0$ , alors  $M_4^c$  est déclaré actif avec les variables « mémoires » temporairement admises.

5.4.2.4. Si  $\left(\frac{|(p)|}{d|(P_c)|}\right)^+ \leq \left(\frac{|(p)|}{d|(P_c)|}\right)^-$  et si le mécanisme s'écrouit pour des chargements de compression :

1. Si la création du mécanisme est intervenue lors de la création de  $M^{pot}$ , le mécanisme cyclique reprend les valeurs établies précédemment pour l'état  $(\sigma^-, \alpha^-)$ . Si  $f_4^c(\sigma^+, \alpha^-) \geq 0$ , alors le mécanisme  $M_4^c$  est déclaré actif.
2. S'il n'y a pas eu de création d'un nouveau mécanisme cyclique isotrope dans  $M^{pot}$ , alors on modifie les variables « mémoires » de  $M_4^c$  temporairement à partir de  $(\sigma^-, \alpha^-)$  et si  $f_4^c(\sigma^+, \alpha^+) \geq 0$ , alors  $M_4^c$  est déclaré actif avec les variables « mémoires » temporairement admises.

**Remarque :**

Dans le cas où  $M^{act} \neq M^{pot}$ , on redémarre l'algorithme de Newton local en utilisant non plus le prédicteur élastique des contraintes  $\tilde{\sigma}_{ij}^{elas}$  (éq.4.7), mais le résultat obtenu à la fin de l'étape échouée précédente,  $(\sigma_{échoué}^+)_{ij}$ , associé aux valeurs des variables internes  $\alpha^-$ . Cette procédure permet de démarrer le processus de résolution de Newton local avec un candidat en contraintes que l'on espère plus proche de la solution finale que le prédicteur élastique.

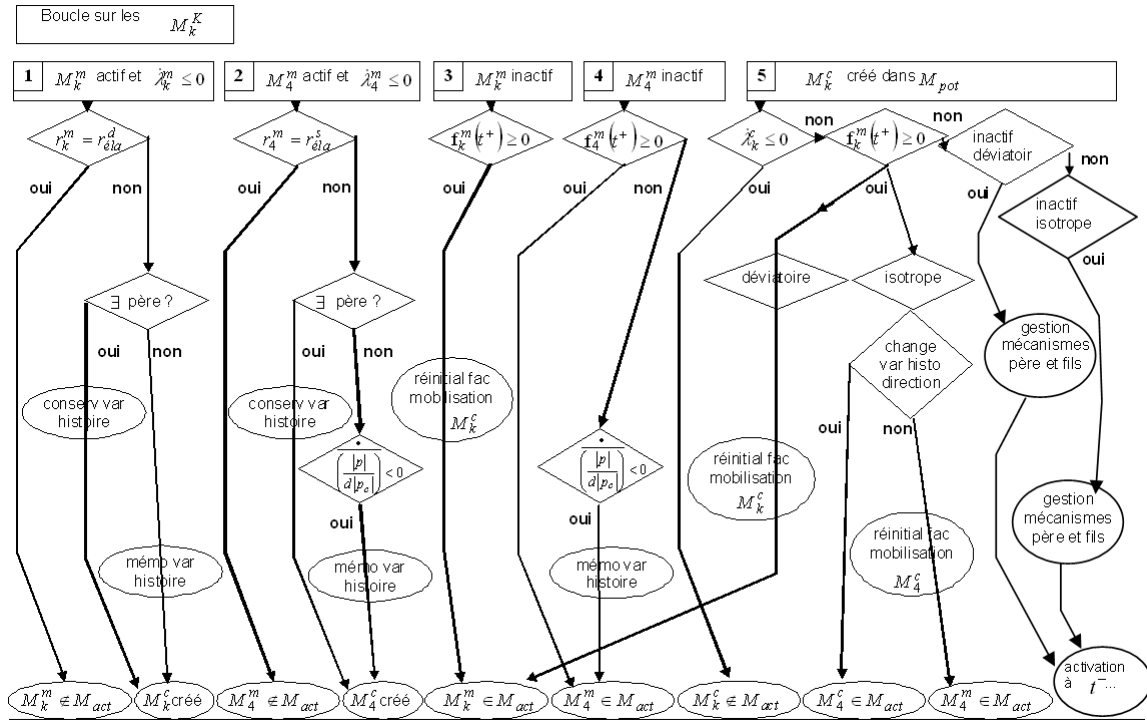


Illustration 4.6 : Schéma global de définition du domaine des mécanismes plastiques activés  $M^{act}$  du modèle de Hujeux

## 4.4 Tenseur élasto-plastique continu

Le tenseur élasto-plastique permet de relier directement la variation de contrainte totale à la déformation totale, le tout exprimé sous forme incrémentale :

$$\dot{\sigma}_{ij} = H_{ijrs}^{ep} \dot{\epsilon}_{rs} = A_{ijrs} (\sigma_{ij}^+) (\dot{\epsilon}_{rs} - \dot{\epsilon}_{rs}^p) \quad (4.26)$$

Son expression est établie à partir des conditions de cohérence pour les mécanismes actifs, monotone ou cyclique  $L=[m, c]$ . Les quantités intervenant dans ces expressions sont calculées pour l'état convergé  $(\sigma^+, \alpha^+)$ .

La condition de cohérence pour un mécanisme  $l$  s'exprime comme suit :



$$\dot{f}_l^L = \frac{\partial f_l^L}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f_l^L}{\partial \epsilon_v^p} \dot{\epsilon}_v^p + \frac{\partial f_l^L}{\partial r_l^L} \dot{r}_l^L = 0 \quad (4.27)$$

avec

$$\begin{cases} \frac{\partial f_l^L}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} &= \frac{\partial f_l^L}{\partial \sigma_{ij}} A_{ijrs}(\sigma_{ij}^+) \left( \dot{\epsilon}_{rs} - \sum_k \dot{\lambda}_k^K (\Psi_k^K)_{rs} \right) \\ \frac{\partial f_l^L}{\partial \epsilon_v^p} \dot{\epsilon}_v^p &= \frac{\partial f_l^L}{\partial \epsilon_v^p} \sum_k \dot{\lambda}_k^K (\Psi_k^K)_{rs} I_{rs} = \frac{\partial f_l^L}{\partial \epsilon_v^p} \sum_k \dot{\lambda}_k^K (\Psi_k^K)_v \\ \frac{\partial f_l^L}{\partial r_l^L} \dot{r}_l^L &= \frac{\partial f_l^L}{\partial r_l^L} \dot{\lambda}_l^L l_l^L, \quad K \in [m, c] \quad L \in [m, c] \end{cases} \quad (4.28)$$

L'écriture explicite de la condition de cohérence pour le mécanisme  $l$  devient :

$$-\sum_k \dot{\lambda}_k^K \left( \frac{\partial f_l^L}{\partial \sigma_{ij}} A_{ijrs}(\sigma_{ij}^+) (\Psi_k^K)_{rs} + \frac{\partial f_l^L}{\partial \epsilon_v^p} (\Psi_k^K)_v \right) + \dot{\lambda}_l^L \frac{\partial f_l^L}{\partial r_l^L} l_l^L = \frac{-\partial f_l^L}{\partial \sigma_{ij}} A_{ijrs}(\sigma_{ij}^+) \dot{\epsilon}_{rs} \quad (4.29)$$

$K \in [m, c], \quad L \in [m, c]$

On définit un vecteur global pour les multiplicateurs plastiques des différents mécanismes actifs (présentés ici avec les quatre mécanismes actifs simultanément) :

$$\Lambda^K = [\dot{\lambda}_1^K, \dot{\lambda}_2^K, \dot{\lambda}_3^K, \dot{\lambda}_4^K] \quad (4.30)$$

Pour la suite, trois autres matrices sont utilisées pour permettre une écriture plus concise de la matrice élasto-plastique du modèle :

$$\begin{cases} B_{lk}^{LK} &= -\frac{\partial f_l^L}{\partial \sigma_{ij}} A_{ijrs}(\sigma_{ij}^+) (\Psi_k^K)_{rs} + \frac{\partial f_l^L}{\partial \epsilon_v^p} (\Psi_k^K)_v + \frac{\partial f_l^L}{\partial r_l^L} l_l^L \delta_{lk} \\ (D_l^L)_{rs} &= \frac{-\partial f_l^L}{\partial \sigma_{ij}} A_{ijrs}(\sigma_{ij}^+) \\ (\Xi_k^K)_{rs} &= [(\Psi_1^K)_{rs}, (\Psi_2^K)_{rs}, (\Psi_3^K)_{rs}, (\Psi_4^K)_{rs}] \end{cases} \quad (4.31)$$

Les dimensions maximales des matrices présentées ci-dessus sont [4x4] pour  $B_{lk}^{LK}$ , [4x6] pour  $(D_l^L)_{rs}$ , [6x4] pour  $(\Xi_k^K)_{rs}$ .

L'inversion du système établi à partir de la relation 4.29 permet d'obtenir l'expression du vecteur des multiplicateurs plastiques :

$$\Lambda^K = (B_{lk}^{LK})^{-1} (D_l^L)_{rs} \dot{\epsilon}_{rs} \quad (4.32)$$

Les manipulations algébriques qui suivent sont nécessaires pour obtenir l'expression de  $H_{ijrs}^{ep}$  :

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{ij} &= A_{ijrs}(\sigma_{ij}^+) (\dot{\epsilon}_{rs} - \dot{\epsilon}_{rs}^p) \\
&= A_{ijrs}(\sigma_{ij}^+) \dot{\epsilon}_{rs} - A_{ijrs}(\sigma_{ij}^+) (\Xi_k^K)_{rs} \Lambda_k^K \\
&= A_{ijrs}(\sigma_{ij}^+) \dot{\epsilon}_{rs} - A_{ijrs}(\sigma_{ij}^+) (\Xi_k^K)_{rs} (B_{lk}^{LK})^{-1} (D_l^L)_{mn} \dot{\epsilon}_{mn}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

L'expression finale de la matrice élasto-plastique  $H_{ijrs}^{ep}$  est donc la suivante :

$$H_{ijrs}^{ep} = A_{ijrs}(\sigma_{ij}^+) \left( I_{ijrs} - (\Xi_k^K)_{rs} B_{lk}^{LK} (D_l^L)_{ij} \right) \tag{4.34}$$

#### Remarque :

Selon Simo et Taylor (1985), le tenseur élasto-plastique continu ne permet pas d'assurer une convergence quadratique, caractéristique des méthodes de Newton. Ce problème est lié au fait que les incréments de contrainte et de déformation sont de dimension finie et non infinitésimale.

Pour préserver cette caractéristique, il faut définir l'opérateur tangent consistant avec le schéma d'intégration. Cette remarque permet d'envisager une amélioration future des développements actuels du modèle de Hujeux dans Code\_Aster, si un tel besoin s'avèrait nécessaire.

### 4.5 Perspectives d'évolution

Pour contribuer à la robustesse et la fiabilité des résultats obtenus suite à l'intégration du modèle de Hujeux, d'autres méthodes de complément aux algorithmes implicites existent dans la littérature.

Armero et Pérez-Foguet (2002) et Jeremic (2001) ont notamment montré le besoin pour les algorithmes implicites type CPPM d'intégrer une méthode de Recherche Linéaire locale. Cette voie d'évolution est actuellement mise en place dans Code\_Aster pour d'autres modèles de comportement. Une application sur le modèle de Hujeux est envisageable et pourrait éventuellement permettre de gagner en stabilité, en robustesse et en temps de calcul.



## 5 Validation numérique de l'implantation du modèle de Hujeux

5 Validation numérique de l'implantation du modèle de Hujeux.....	79
5.1 Introduction.....	79
5.2 Modélisation d'une colonne 1D de sol bi-phasique saturé.....	81
5.2.1 Construction par couches.....	81
5.2.1.1 Géométrie.....	81
5.2.1.2 Propriétés des matériaux.....	82
5.2.1.3 Conditions aux limites et chargement.....	83
5.2.1.4 Déroulement du calcul.....	84
5.2.1.5 Post-traitement des résultats.....	84
5.2.2 Analyse sismique .....	86
5.2.2.1 Conditions aux limites et chargement.....	87
5.2.2.2 Résultats de l'étude.....	88
5.2.3 Conclusion sur l'étude de la colonne de sol.....	91
5.3 Conclusion sur l'implantation du modèle de Hujeux.....	93

### 5.1 Introduction

Le processus de validation de l'implantation numérique du modèle de Hujeux a été mené en comparant les résultats fournis par Code\_Aster et le logiciel Lawyer, développé à l'École Centrale Paris.

Le logiciel Lawyer réalise l'intégration numérique sur un point matériel du modèle de Hujeux dans sa version V0 (§3.1 ) pour des chargements quelconques et pour des conditions drainées ou non drainées. Le chargement considéré à ce point matériel est appliqué directement en contraintes, déformations ou sollicitations mixtes. Le modèle est intégré selon un schéma explicite avec redécoupage local, algorithme choisi à la suite des travaux de thèse de Piccuezzi (1991).

La procédure de validation a été menée par étapes dans le but de s'assurer de la bonne implantation des différents mécanismes du modèle. Les différentes étapes pour valider l'intégration ont été les suivantes :

- Essai de compression isotrope cyclique. Ce test permet essentiellement de contrôler la bonne implantation des mécanismes isotropes monotone et cycliques.
- Essai de cisaillement cyclique. Ce test permet un contrôle de l'implantation correct des mécanismes déviatoires monotone et cycliques pour différents taux de confinement initial.
- Essais triaxiaux drainés monotones. Ces tests ont permis de valider le couplage de résolution entre les mécanismes déviatoires monotones et le mécanisme isotrope monotone, aussi bien pour des matériaux à caractère dilatant que contractant.
- Essais triaxiaux non-drainés monotones. Ces tests ont permis de valider le couplage entre les mécanismes déviatoires monotones et les mécanismes isotropes monotone et cycliques, pour des matériaux lâches et denses.
- Essais triaxiaux non drainés cycliques. Ces tests valident le couplage entre

les mécanismes isotropes monotone et cycliques, ainsi que les mécanismes déviatoires monotone et cycliques.

- Essais cycliques avec rotation du tenseur des contraintes, qui ont permis de mettre en avant la formulation exacte de l'évolution des facteurs de mobilisation cycliques déviatoire et isotrope (§3.3.4 et §3.4.4 ).

L'ensemble de ces résultats est aujourd'hui restitué dans la base de cas-tests du logiciel Code\_Aster. Ils sont accessibles aux utilisateurs du logiciel, mais également documentés et publiés en ligne sur le site de Code\_Aster([www.code-aster.org](http://www.code-aster.org)).

La démarche consistait ensuite à réaliser une étude de consolidation d'une colonne de sol, en modélisant sa construction par couches successives. Cette étude a été confrontée aux résultats obtenus avec le logiciel éléments finis de l'ECP, GEFDyn.

Le logiciel d'Éléments Finis GEFDyn contient également le modèle de Hujieux (version V0 §3.1 ), intégré selon le même schéma explicite avec redécoupage local que celui présent dans Lawyer.

Enfin, avant l'application du modèle à la simulation d'un cas d'étude industrielle (modélisation d'une digue en terre), un chargement sismique a été appliqué à la colonne de sol précédemment construite par couches.

Les aspects de stabilité, robustesse et respect des équations du modèle sont détaillés en annexes 9.4 et 9.5 (p.213) pour un essai biaxial drainé et un essai triaxial non drainé cyclique. Ces essais sont modélisés pour différentes valeurs d'incrément de chargement dans le but d'évaluer les capacités de l'algorithme implicite appliqué au modèle de Hujieux, sans redécoupage local.

Les conclusions générales de ces deux essais sont les suivantes :

- Les valeurs des variables d'état, telles que l'état de contraintes et les variables internes du modèle sont identiques entre les deux codes de calcul lorsqu'ils ont atteint respectivement la convergence de leurs résultats.
- La convergence des résultats issus du schéma implicite est obtenue pour des valeurs d'incrément au moins 10 fois plus larges que les valeurs obtenues avec le schéma d'intégration explicite avec sous-découpages locaux.
- Pour des incréments de chargement trop importants, l'algorithme d'intégration locale diverge. Il apparaît nécessaire d'introduire des critères de sous-découpages locaux (voir §4.2 et §4.3.4 ) en vue d'une utilisation industrielle du modèle.
- Le nombre d'itérations de corrections plastiques locales reste faible pour les trajets de chargement monotone mais augmente rapidement lorsque des changements de direction de chargement surviennent.
- Le taux de convergence quadratique de l'opérateur tangent est obtenu à partir d'un taux d'incrément minimum.

Le cas-test présenté en annexe 9.6 (p.235) a été réalisé dans le but de solliciter le modèle de Hujieux sur un chemin de chargement inédit et de tester l'aptitude des développements mis en œuvre à reproduire la formulation originale du modèle de

Hujeux. L'essai étudié s'apparente à un essai de cisaillement cyclique drainé contrôlé en force. Au cours des cycles de charge-décharge, des micro-décharges sont réalisées pour tester la capacité du modèle de Hujeux à retrouver le module de cisaillement écroui avant cette micro-décharge. Le schéma d'intégration implicite permet d'obtenir le comportement attendu.

Le paragraphe suivant (§5.2) démontre la capacité du Code\_Aster à reproduire les résultats fournis par GEFDyn pour l'étude de construction par couches d'une colonne de sol, suivie d'un chargement sismique appliqué à la base de la colonne.

## 5.2 Modélisation d'une colonne 1D de sol bi-phasique saturé

L'objet de cette étude est de modéliser numériquement la pose successive des couches d'une colonne unidimensionnelle de sol, en prenant en compte à la fois le couplage hydro-mécanique (la consolidation du sol par diffusion du fluide) et la plastification du sol due à son comportement non linéaire, puis l'application d'un chargement sismique.

L'analyse de ce cas fournit un outil de base pour l'ingénierie géotechnique : mise en place de la modélisation de la construction, mais aussi convolution du signal sismique filtré par la colonne de sol. Ce dernier point est essentiel en analyse sismique pour déduire de manière simplifiée un « effet de site » lié à la stratification locale des sols.

Les modèles et la documentation de ces cas-tests sont disponibles sur le site de Code\_Aster. Les études sont référencées sous les étiquettes WTNV132 et WDNP101. Les rédacteurs de ces documentations sont M.Kham et G.Devesa. Ces tests ont permis de valider les méthodologies de construction par couches d'une colonne de sol et d'application d'un chargement sismique réalisé avec le modèle de Hujeux. Ils ont également permis d'améliorer la robustesse des algorithmes d'intégration locale du modèle de Hujeux.

Pour cette étude, l'intégration numérique du modèle de Hujeux dans Code\_Aster prend en compte les critères de sous-incrémentations présentés aux §4.2 et §4.3.4.

### 5.2.1 Construction par couches

On souhaite modéliser numériquement la pose successive des couches d'une colonne unidimensionnelle de sol, en prenant en compte à la fois le couplage hydromécanique et la plastification du sol due à son comportement non-linéaire (modèle de Hujeux). Les solutions calculées sont comparées à des résultats issus du code par éléments finis GEFDyn de l'ECP.

#### 5.2.1.1 Géométrie

Le modèle est constitué de 10+1 éléments au total : il s'agit de poser 10 couches de sol sur un substratum élastique poreux rigide représenté par une 11ème couche indiquée 0, d'une hauteur de 5m (illustration 5.1). Chaque couche est constituée d'un élément de maillage (QUAD8

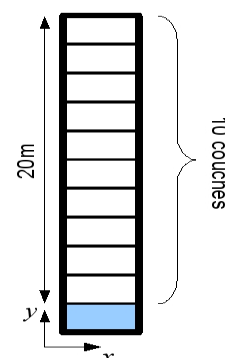


Illustration 5.1 : Géométrie de la colonne de sol sur substratum rocheux

en 2D ou HEXA20 en 3D), d'une hauteur de 2 m, d'une largeur et d'une profondeur de 1 m chacune. La colonne de sol mesure donc 20 m au total.

Par principe, le problème est bidimensionnel (les déformations planes se produisent dans un plan vertical). On se place de plus dans l'hypothèse d'une invariance du sol par translation horizontale. Les déformations mécaniques et les flux hydrauliques sont donc nuls dans la direction horizontale (modèle œdométrique).

### 5.2.1.2 Propriétés des matériaux

Les propriétés élastiques, inélastiques et hydrauliques des matériaux utilisées sont décrites ci-après :

Modèle de Hujeux		Loi d'écoulement + Écrouissage isotrope		Propriétés hydrauliques	
Élasticité		$\psi$	31	$\rho_s [kg/m^3]$	2700
$K_{ref} [MPa]$	313,1	$a_{mon}$	0,017	$\rho_e [kg/m^3]$	1000
$G_{ref} [MPa]$	215,6	$a_{cyc}$	0,001	$B$	1,0
$n_e$	0,5	$c_{mon}$	0,08	Viscosité : $\nu$	$10^{-3}$
$P_{ref} [MPa]$	-1,0	$c_{cyc}$	0,04	$K^{int} [m^3/kg/s]$	$10^{-12}$
État critique + Plasticité parfaite		$x_m$	0,9	$H_w [Pa^{-1}]$	$10^{-7}$
$\phi$	31	Seuil des domaines		Porosité	0,35
$\beta$	30	$r_{ela}^d$	0,01		
$d$	2	$r_{ela}^{iso}$	0,001		
$b$	0,22	$r_{hys}$	0,05		
$P_{c0} [MPa]$	-1,12	$r_{mob}$	0,9		
		$\alpha$	1,5		

**Tableau 5.1 : Paramètres matériau établis par Kordjani (1995)**

Le matériau poro-élastique du rocher est caractérisé par un module d'Young égal à 5000 MPa avec un coefficient de Poisson de 0,3 et des propriétés hydrauliques identiques à celles précisées dans le tableau 5.1.

La valeur de la perméabilité du matériau poreux s'obtient à partir de la perméabilité intrinsèque, la viscosité, la masse volumique de l'eau et l'accélération de pesanteur<sup>4</sup>.

4 On calcule d'abord la conductivité du fluide à partir de la conductivité intrinsèque :

$$\lambda = \frac{K^{int}}{\nu} = 10^{-9} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} ; \text{ ce qui donne finalement pour la perméabilité du matériau}$$

$$\text{poreux : } K = \rho_e g \lambda = 9,81 \times 10^{-6} \text{ m s}^{-1}$$

### 5.2.1.3 Conditions aux limites et chargement

Dans le modèle considéré, les conditions aux limites s'appliquent aux  $N+1$  couches présentes à l'étape  $N$  du calcul. Elles sont identiques à celles d'un essai œdométrique (la colonne de sol est un échantillon d'un espace infini par translation horizontale) :

- Les conditions d'invariance horizontale :
  - $u_x=0$  sur les segments latéraux ;
- Une condition de blocage de la couche rigide de substratum :
  - $u_y=0$  sur le segment du bas ;
- Une condition de pression hydraulique nulle à la surface libre de la colonne dans le but de simuler une condition de drainage :
  - $p_w=0$  sur la maille du dessus de la  $N+1^{\text{ème}}$  couche (dernière posée) ;
- Un état de contrainte effectif isotrope initial non nul dans chaque couche posée, correspondant au poids d'une couche de 1m constituée du même matériau<sup>5</sup> :
  - $P_0=-10$  kPa dans la  $N+1^{\text{ème}}$  couche (dernière posée) ;
- Les conditions de chargement :
  - L'ensemble de la colonne de sol est soumis à la pesanteur ;

La construction de la colonne de sol s'effectue en respectant un laps de temps  $\Delta t=10^6 s$  entre le début de l'étape  $N$  et celui de l'étape  $N+1$ , ce qui correspond à une vitesse de construction de  $2 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$  ( $\approx 17 \text{ cm/jour}$ ). Durant ce laps de temps, il y a diffusion du fluide et consolidation de la colonne de sol sous l'effet de son propre poids (tassement de la colonne). Il est important de veiller à ce que ce laps de temps soit suffisant en le mettant en rapport avec la valeur de la perméabilité du matériau poreux. Notamment, le produit de  $\Delta t$  avec cette perméabilité donne une distance de diffusion du fluide qui doit être suffisante (ici de l'ordre de 10 m) par rapport à la dimension de la colonne (20 m de hauteur).

	Parois du modèle	Valeurs
Conditions aux limites	BAS	$u_y=0$
	FACES LATÉRALES	$u_x=0$
	HAUT	$p_w=0$
	Confinement initial	$P_0=-10$ kPa
Char- gement	TOUS	Pesanteur $g=-9,81 \text{ m/s}^2$

**Tableau 5.2 : Conditions aux limites et chargement appliqués pour la construction de la colonne de sol**

<sup>5</sup> Cette initialisation est indispensable pour les matériaux dont les propriétés dépendent de l'état initial et son choix peut avoir des conséquences sur la réponse finale.



#### 5.2.1.4 Déroulement du calcul

La méthode pour la construction de la colonne de sol est une approche multi-modèles. A chaque étape  $N+1$  du calcul, un modèle contenant strictement les  $N+1$  couches posées est construit. Les états de contraintes, déplacements et variables internes issus de l'étape précédente sont transférés à l'étape  $N+1$  par des opérations de transfert de champ.

La modélisation est bidimensionnelle et quasi-statique. Chaque couche est représentée par un élément QUAD8. On utilise une modélisation avec intégration complète, soit 9 points d'intégration. L'algorithme de Newton-Raphson est utilisé pour résoudre les équations d'équilibre et le modèle de Hujeux est intégré implicitement.

Le déséquilibre global maximal exigé est inférieur à une valeur relative de  $10^{-10}$  durant la phase de construction de la colonne pour les résultats fournis par Code\_Aster.

L'intégration numérique, pour le code GEFDyn (utilisé pour la comparaison), est effectuée par la méthode de Gauss en utilisant 4 points d'intégration par élément 2D (extension de l'étude réalisée par Lopez-Caballero et Modaressi (2006a)). Lorsque le problème est couplé, les tests de convergence sur GEFDyn sont dédoublés sur chacune des parties mécaniques et hydrauliques. La convergence est alors considérée acquise si quatre tests sont satisfaits : en déplacements-rotations, en pressions interstitielles, en déséquilibre mécanique et en déséquilibre hydraulique. Les critères de convergence sont tous normalisés par la valeur de la variable d'intérêt au niveau de chargement précédent (Aubry et Modaressi (1996)). La tolérance sur les déplacements est égale à  $10^{-3}$  et la tolérance sur le déséquilibre est égale à  $10^{-2}$ . L'algorithme de Newton modifié est utilisé.

#### 5.2.1.5 Post-traitement des résultats

Les solutions sont post-traitées en termes de tassement. Cependant, l'utilisation de la méthode multi-modèles ne donne pas accès directement au tassement de la colonne : le déplacement vertical de la dernière couche posée  $N+1$  est la somme du tassement réellement induit par cette couche et du tassement cumulé des couches inférieures. Il est alors nécessaire de retirer ce tassement cumulé pour s'intéresser uniquement au tassement subi par la seule couche  $N+1$ .

L'illustration 5.2 présente les résultats obtenus avec Code\_Aster pour l'ensemble des étapes. La courbe fournie par le logiciel GEFDyn est superposée après la pose de la dernière couche. Les résultats sont très proches entre les deux codes et convergent vers une valeur maximale du tassement de l'ordre de 4 cm au centre. Le tassement dans la colonne de sol présente un profil symétrique par rapport à un axe horizontal situé à une hauteur de 15 m (il faut ajouter les 5 m de la fondation rigide). De faibles différences apparaissent néanmoins en tête de colonne entre les deux codes.

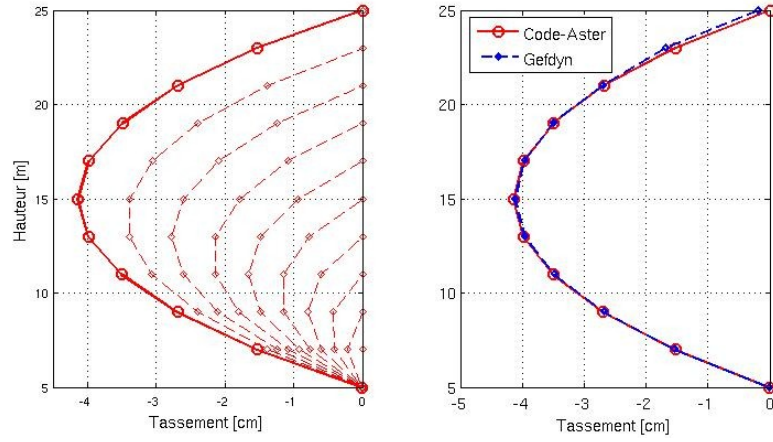


Illustration 5.2 : Tassement de la colonne de sol après sa construction ; (gauche-a) Évolution du tassement au cours de la construction ; (droite-b) Comparaison des résultats entre Code\_Aster et GEFDyn

L'illustration 5.3 présente en simultanée le profil des contraintes verticales et de la pression hydraulique de la colonne de sol en fin de construction. Les résultats portés sur cette courbe sont issus des logiciels Code\_Aster et GEFDyn et apparaissent également identiques. L'équilibre hydrostatique semble atteint au sein de la colonne après sa consolidation. La discrétisation spatiale est différente entre les deux codes. Avec GEFDyn, les valeurs sont relevées en chaque point de Gauss, tandis que les résultats de Code\_Aster sont calculés aux nœuds sommets des éléments par extrapolation.

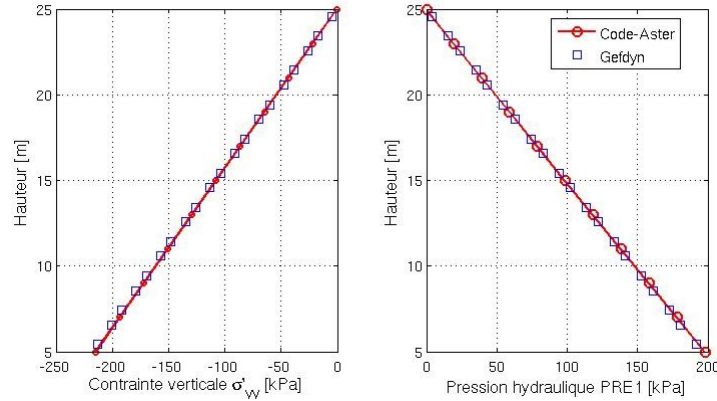


Illustration 5.3 : Comparaison des profils de contraintes verticales et de pression hydraulique en fin de construction de la colonne de sol entre les logiciels Code\_Aster (ronds rouges) et GEFDyn (carrés bleus)

Une comparaison plus fine entre les deux codes peut être réalisée en post-traitant les variables d'écroûissage du modèle de Hujeux. Les résultats présentés ci-dessous reprennent les rayons déviatoires monotones  $r_z^m$ , les rayons isotropes monotones  $r_{iso}^m$  et les déformations volumiques plastiques cumulées  $\epsilon_v^p$ . Des différences plus nettes apparaissent pour le profil des rayons déviatoires monotones  $r_z^m$ , en valeurs mais également leurs évolutions respectives (illustration 5.4a). En tête de colonne, les résultats fournis par GEFDyn prédisent un écroûissage plus

important (  $0,2 \rightarrow 0,5$  ). Cette différence en tête de colonne confirme les remarques formulées au regard des tassements de la colonne. En revanche, l'écroûissage porté par le mécanisme isotrope est quasi identique pour les deux codes (illustration 5.4b). Il en est de même concernant les valeurs obtenues pour la variable de couplage du modèle, la déformation volumique plastique,  $\epsilon_v^p$  (illustration 5.5).

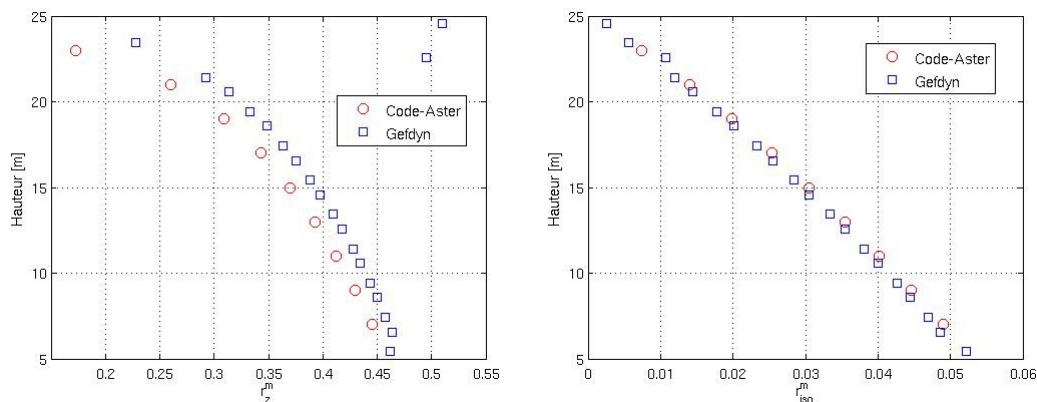


Illustration 5.4 : Comparaison des profils de rayons déviatoires monotones (a-gauche) et rayons isotropes monotones (b-droite)

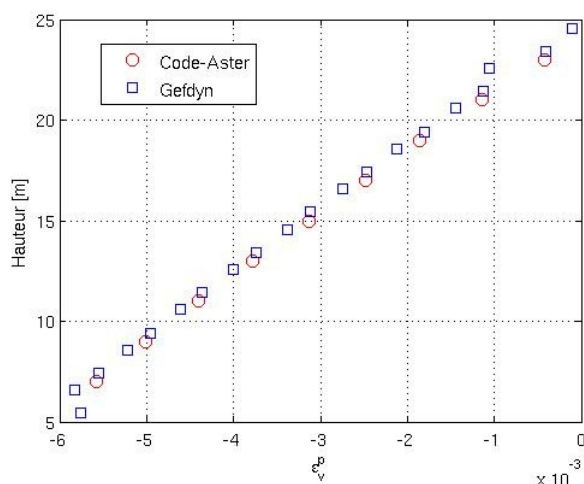


Illustration 5.5 : Comparaison du profil de  $\epsilon_v^p$  à la fin de la construction de la colonne

### 5.2.2 Analyse sismique

La réponse dynamique à une sollicitation sismique est calculée en continuité de l'étape initiale de pose successive des couches réalisée en quasi-statique. Le chargement sismique est appliqué directement après la fin de la construction de la colonne de sol, sans temps de repos.

Les analyses sismiques réalisées avec GEFDyn (extension de l'étude réalisée par Lopez-Caballero et Modaressi (2006b)) et Code\_Aster utilisent un schéma d'intégration dans le temps de Newmark implicite avec  $\gamma=0,5$  et  $\beta=0,25$

(schéma présenté au §9.8.2.1 ), valeurs n'introduisant aucun amortissement lié au schéma numérique. Le résidu global relatif sur l'équilibre est fixé à une valeur de  $\eta=10^{-6}$  durant le séisme pour le calcul avec Code\_Aster.

Le pas de temps utilisé pour les deux logiciels est de  $10^{-3}$  s . L'échantillonnage du signal sismique appliqué est de  $10^{-2}$  s .

### 5.2.2.1 Conditions aux limites et chargement

Au cours de cette étape, les conditions aux limites de chargement sont très similaires à celles exposées pour l'étude statique précédente. La différence majeure provient du blocage des déplacements latéraux des faces latérales. Cette condition est remplacée par une condition de périodicité obtenue en rendant égaux les déplacements des nœuds des faces gauche et droite en vis-à-vis.

La seconde différence intervient sur la couche de substratum rocheux. Les déplacements horizontaux ne sont plus bloqués sur les bords latéraux et des éléments de frontière absorbante à effet amortisseur en dynamique sont ajoutés (voir Modaressi (1987) et Aubry et Modaressi (1992)).

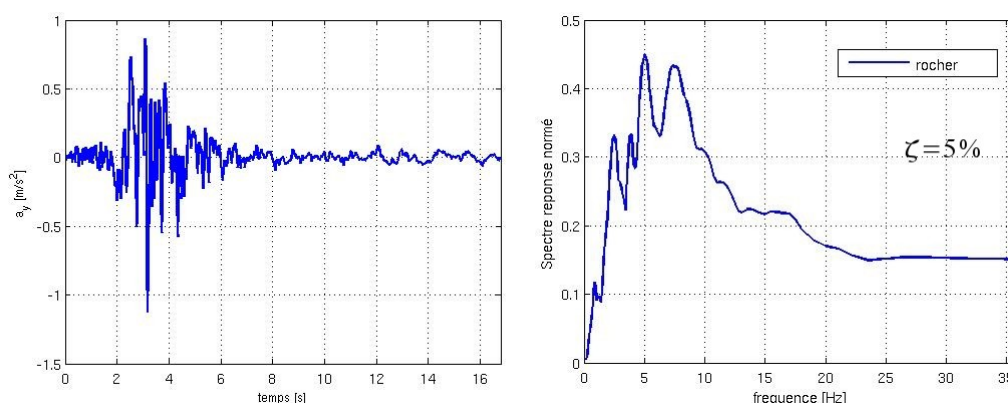


Illustration 5.6 : Accélération imposée (gauche) et spectre normé (droite) au bas du rocher en fonction du temps, normée à 0,15 g

Pour les calculs dynamiques, un accélérogramme est utilisé pour simuler le chargement sismique (illustration 5.6), normé selon l'accélération maximale voulue.

Dès la fin de la phase de construction de la colonne, un chargement supplémentaire à la pesanteur verticale est appliqué. Dans un premier temps,

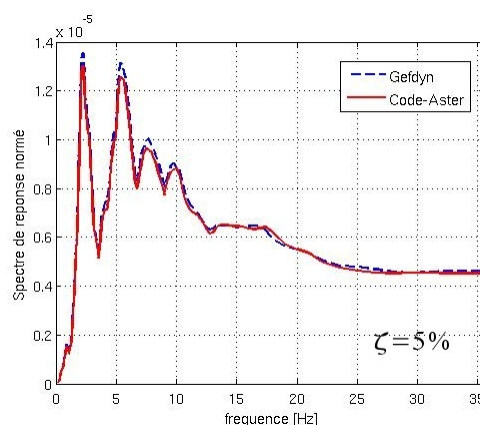


Illustration 5.7 : Comparaison des spectres réponse obtenus en tête de colonne avec GEFDyn et Code\_Aster en fonction de la fréquence (cas «élastique»)

une accélération horizontale mono-appui<sup>6</sup> équivalente à une pesanteur dans la direction horizontale, pondérée par une excitation normée à  $10^{-5} \text{ m/s}^2$  est appliquée à toute la colonne sur un intervalle de  $16,8 \text{ s}$ . Ce premier calcul permet de solliciter uniquement la colonne de sol de façon élastique. De cette façon, on s'assure que les schémas en temps utilisés dans les deux codes de calcul sont bien identiques.

Dans un second temps, une accélération horizontale mono-appui pondérée par une excitation normée de  $0.15 g$  est appliquée à l'ensemble de la colonne sur le même intervalle de temps.

### 5.2.2.2 Résultats de l'étude

Les résultats obtenus pour le chargement sismique réduit sollicitant uniquement une réponse élastique de la colonne de sol sont présentés sur les illustrations 5.7 et 5.8. Les résultats sont très concluants et quasi-identiques entre les deux logiciels. Des différences, interprétées comme mineures, sont relevées aux pics de réponse sur l'illustration 5.7. Les schémas numériques propres à chaque code donnent des résultats équivalents en temps et en fréquence.

En prenant en compte l'état de contraintes du matériau dans la colonne de sol et la dépendance du module de cisaillement à cet état de contraintes, on obtient à partir de la formule analytique la fréquence fondamentale égale à  $f_0^{\text{anal}} = 2,14 \text{ Hz}$  à partir de la formule  $f_0 = \frac{1}{4} \sum_i^k \frac{V_{si}}{H_i}$ ,  $k$  étant le nombre de couches du milieu. La valeur obtenue numériquement est très proche de la formule analytique puisqu'elle est égale à  $f_0^{\text{num}} = 2,25 \text{ Hz}$ .

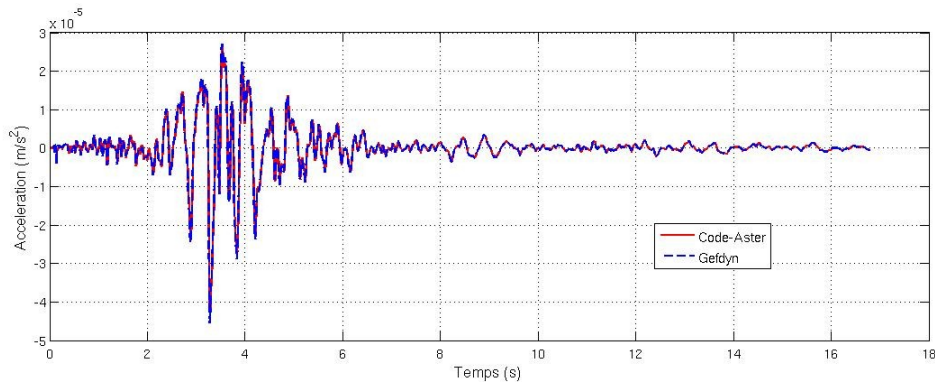


Illustration 5.8 : Comparaison de l'accélération relevée au sommet de la colonne de sol entre GEFDyn (bleu discontinu) et Code\_Aster (rouge continu) pour une accélération normée à  $10^{-5} \text{ m/s}^2$

Les accélérations relevées au sommet de la colonne de sol entre les deux logiciels de calcul sont comparées sur l'illustration 5.9 ( pour le signal normé à  $0,15 g$  ). Les signaux sont très proches entre les deux logiciels pour les six premières secondes du signal. Les valeurs des accélérations maximales sont du même ordre. On remarque ensuite des différences plus nettes après  $6 \text{ s}$  de signal. L'amplitude de la réponse obtenue avec Code\_Aster est alors plus importante et un déphasage apparaît entre les deux réponses. Les résultats obtenus dans le domaine fréquentiel

6 C'est à dire que le déplacement de la colonne est résolu en repère relatif.

confirme ces différences (illustration 5.10a). On constate néanmoins que le premier pic de résonance est bien relevé par les deux logiciels. Le deuxième mode de déformation apparaît à une fréquence quasi-identique entre les deux logiciels, mais son amplitude est plus marquée avec Code\_Aster. A partir du troisième mode de déformation, les fréquences propres et valeurs de réponses associées sont différentes et les fréquences plus faibles avec Code\_Aster.

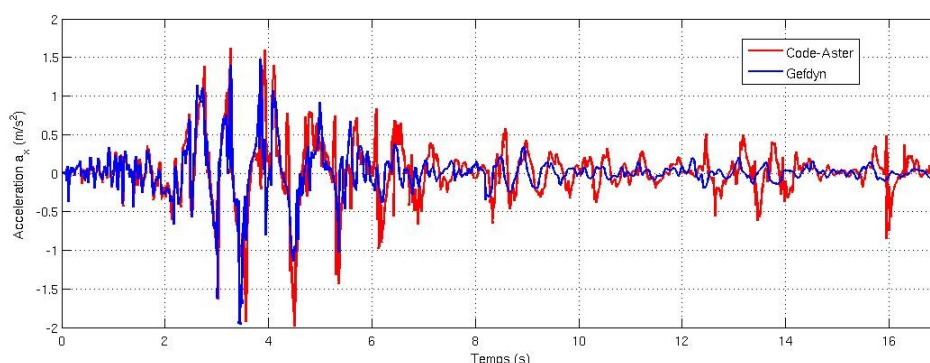


Illustration 5.9 : Comparaison de l'accélération relevée au sommet de la colonne de sol entre GEFDyn (bleu discontinu) et Code\_Aster (rouge continu) pour une accélération normée à 0.15 g

En comparant les profils de contraintes effectives et de pression hydraulique dans la colonne de sol en fin de séisme (  $t=16,8s$  ) (illustration 5.12), on constate également des différences, localisées en tête et en partie inférieure de colonne. En effet, à une profondeur de 2 m sous la surface libre, le sol s'est liquéfié avec Code\_Aster (  $\sigma_{yy} \approx 0 Pa$  ), tandis qu'avec GEFDyn, ce phénomène ne se produit pas en totalité. On observe néanmoins également une montée de pression hydraulique à ce niveau de profondeur sur GEFDyn. Les profils de contraintes sont également différents en partie inférieure où les solutions issues de GEFDyn présentent une diminution des contraintes effectives, moins marquée sur Code\_Aster (illustrations 5.11 et 5.12a).

L'illustration 5.10b présente le profil du déplacement vertical obtenu après le chargement sismique pour les deux logiciels. On constate des différences plus marquées à partir d'une profondeur de 8 m . A cette hauteur, les déplacements obtenus avec GEFDyn présentent un incrément important de déplacement axial, non retrouvé avec Code\_Aster. Sur l'illustration 5.12a, on peut également distinguer une baisse de l'état de contraintes effectives. Après ce point, les résultats diffèrent en valeurs mais non en terme d'évolution. La différence se réduit finalement en tête de colonne où Code\_Aster prédit la liquéfaction du sol qui produit des déplacements importants.



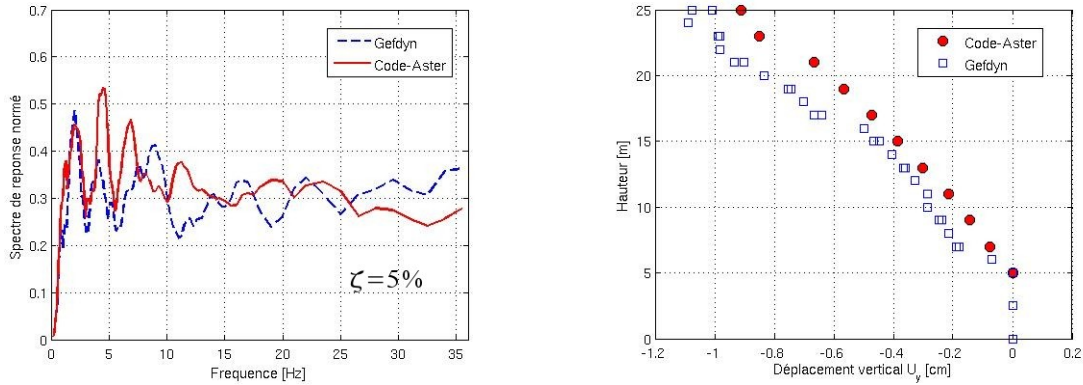


Illustration 5.10 : (Gauche-a) Comparaison des spectres de réponse obtenus en tête de colonne avec Code\_Aster et GEFDyn en fonction de la fréquence ; (Droite-b) Comparaison des déplacements verticaux ( $dU_y$ ) dans la colonne de sol à  $t = 16,8$  s entre Code\_Aster (rond rouge) et GEFDyn (carré bleu) ;

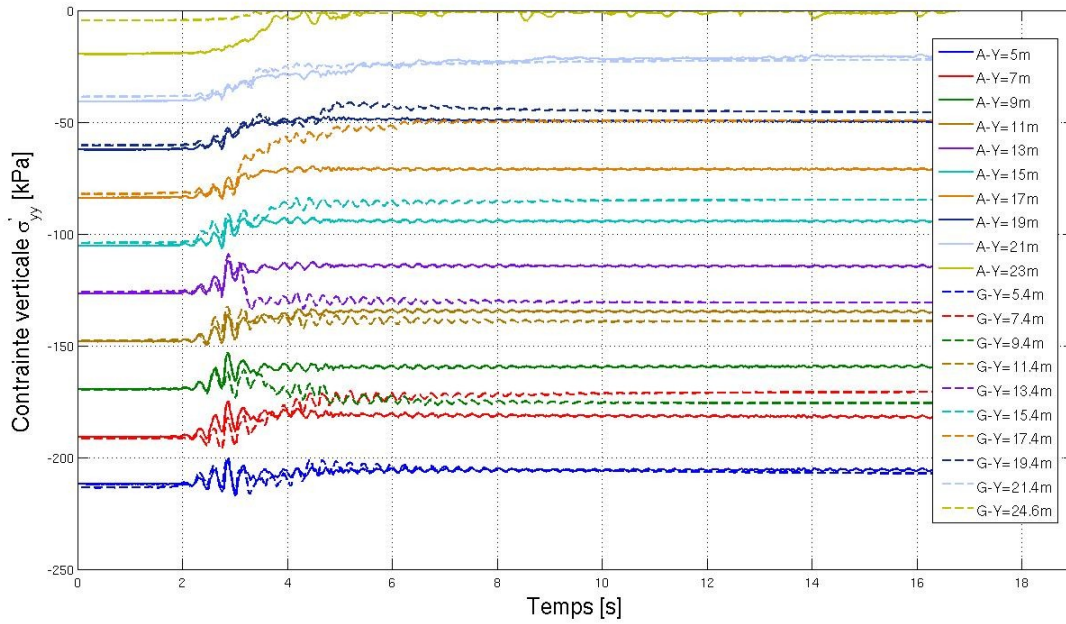
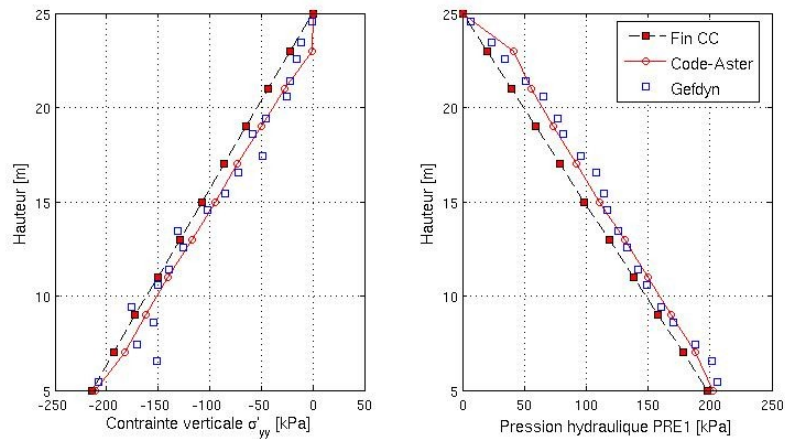


Illustration 5.11: Évolution temporelle des contraintes effectives verticales dans la colonne de sol; A-Code\_Aster / G-GEFDyn



*Illustration 5.12 : Comparaison des profils de  $\sigma'_{yy}$  et  $p_w$  relevés après le séisme ( $t = 16,8\text{ s}$ ) dans la colonne de sol entre Code\_Aster (rond rouge) et GEFDyn (carré bleu) ; superposition des valeurs obtenues en fin de construction de la colonne (Fin-CC)*

### 5.2.3 Conclusion sur l'étude de la colonne de sol

Les résultats sont apparus quasi-identiques entre les deux logiciels après les phases de construction par couches. Les profils des états de contraintes effectives, de pression hydraulique et de tassements relevés sur la colonne de sol ont permis de s'assurer d'une part que la méthodologie mise en place dans Code\_Aster pour réaliser cette étude de construction était identique à celle proposée par l'équipe de chercheurs de l'École Centrale Paris. D'autre part, cette phase de construction a permis de valider, sur une structure, la capacité de l'algorithme implicite de Hujeux à donner des résultats convaincants tout en utilisant pour l'algorithme de Newton global la matrice élasto-plastique continue du modèle de Hujeux.

En revanche, des différences apparaissent après l'application du chargement sismique normé à  $0,15g$  entre les deux codes. Les résultats obtenus en tête de colonne en terme d'accélération sont très proches entre les deux logiciels sur les premières secondes du séisme (jusqu'à  $6\text{ s}$ ), avant l'apparition de variations sur l'amplitude des accélérations relevées. Les réponses des spectres d'accélération dans le domaine fréquentiel présentent des différences significatives après le pic de résonance. De même, les profils des contraintes effectives et de pression hydraulique sont proches, mais des différences apparaissent néanmoins en des points particuliers de la structure. La liquéfaction en tête de colonne apparaît uniquement avec Code\_Aster et une baisse des contraintes effectives à une hauteur de  $17\text{ m}$  apparaît avec GEFDyn, qui conduit à des variations sur les déplacements verticaux de la colonne.

Malgré les tests de non régression mis en place, pour tester le modèle de Hujeux dans son intégralité et divers chemins de chargement, des différences subsistent entre les deux logiciels lors de l'analyse sismique de la colonne de sol. Le calcul sismique sollicitant la colonne de sol dans son domaine élastique nous a pourtant assuré que les schémas numériques de Newmark des deux logiciels donnent des résultats quasi-identiques dans une situation où le couplage hydro-mécanique ne joue pas (onde S).



La procédure mise en place pour identifier les sources de différences entre les deux logiciels nous a conduit ensuite à réaliser la construction et la mise sous séisme de la colonne de sol avec un modèle purement mécanique (cas drainé). Les résultats obtenus sont cette fois-ci beaucoup plus proches et présentés sur les illustrations 5.13, 5.14, 5.15 et 5.16. On ne constate aucun déphasage particulier entre les deux réponses des codes pour les accélérations relevées en tête de colonne, de même que sur le spectre d'accélération où les 3 premiers pics de résonance sont bien retrouvés (jusqu'à  $\sim 10$  Hz ).

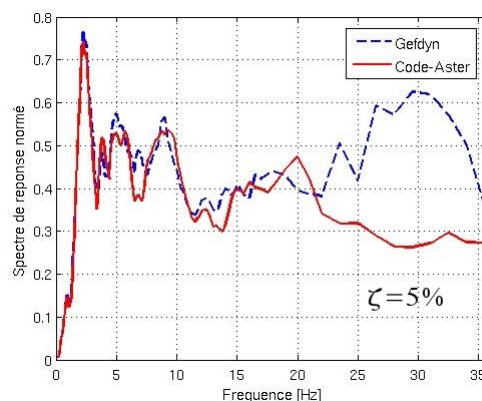


Illustration 5.13 : Comparaison des spectres de réponse obtenus en tête de colonne avec Code\_Aster et GEFDyn en fonction de la fréquence en conditions sèches

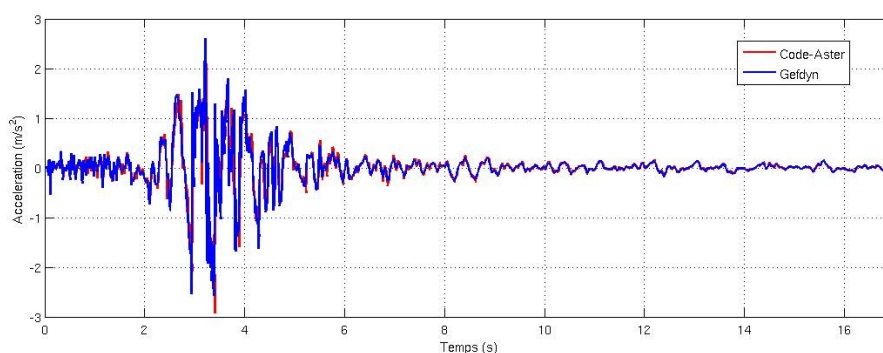


Illustration 5.14 : Comparaison des accélérations relevées au sommet de la colonne de sol entre Code-Aster et GEFDyn pour une colonne sèche (signal normé à  $0,15 g$  )

Les différences relevées sur l'évolution de  $\epsilon_v^p$  sont à rapprocher des divergences constatées entre les deux codes pour la gestion des micro-décharges cycliques (§9.6 ), conduisant à surestimer la valeur de  $\epsilon_v^p$  pour GEFDyn par rapport à Code-Aster et développer des niveaux de tassements supérieurs à cette hauteur (  $Y=15m$  ). Cette modélisation en conditions sèches permet tout de même de repousser les différences constatées précédemment sur la prise en compte des termes hydrauliques durant le chargement sismique. Cette remarque n'est pas en contradiction avec les calculs réalisés pour un séisme faible sollicitant uniquement une réponse élastique de la colonne, puisque la déformation volumique reste nulle pour un chargement faible de cisaillement. La pression hydraulique dans la colonne de sol n'évolue pas durant ce calcul.

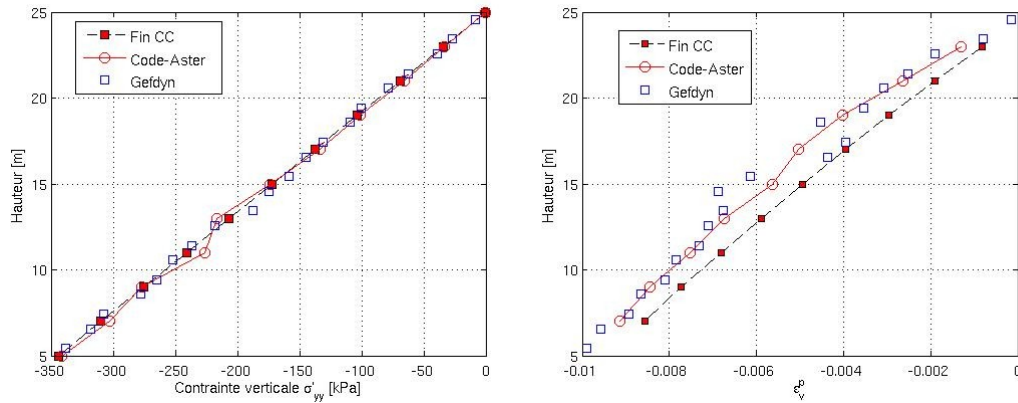


Illustration 5.15 : Comparaison des profils de contrainte verticale et  $\epsilon_v^p$  en fin de séisme,  $t = 16,8\text{ s}$ , entre Code\_Aster et GEFDyn ; superposition des valeurs obtenues en fin de construction de la colonne (Fin-CC) ; cas de la colonne sèche

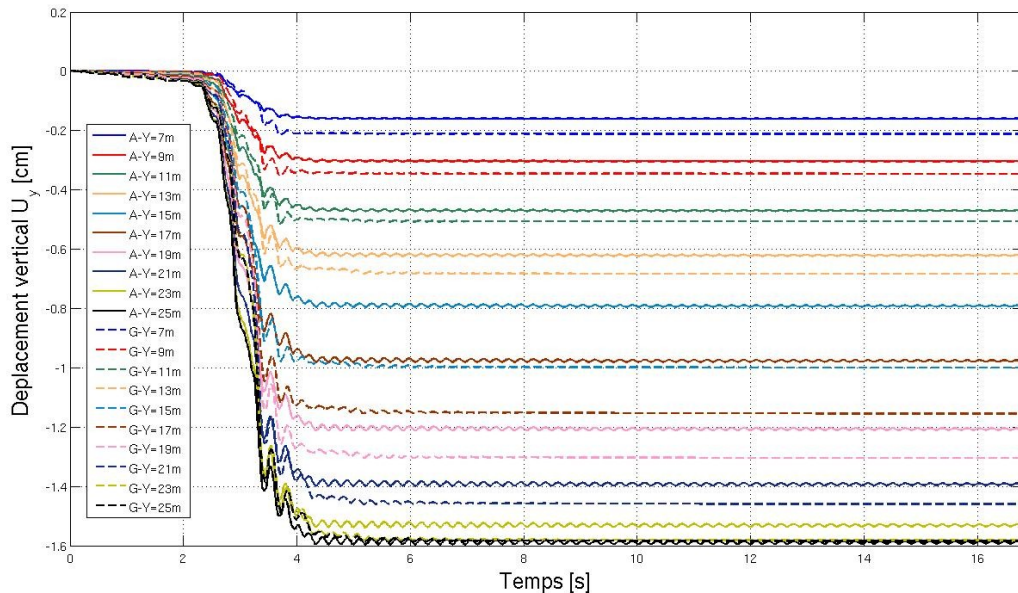


Illustration 5.16 : Comparaison des tassements relevés durant le séisme entre Code\_Aster et GEFDyn à différents niveaux de hauteur (cas de la colonne sèche) ; G-GEFDyn et A-Code\_Aster

### 5.3 Conclusion sur l'implantation du modèle de Hujeux

Les résultats obtenus avec le modèle de Hujeux implanté dans Code\_Aster selon un schéma d'intégration implicite sont en accord avec le comportement phénoménologique du modèle incrémental. Les développements réalisés, en comparaison des résultats obtenus avec GEFDyn, sont validés sur une large gamme de chemins de chargement.

La formulation du modèle a également été élargie pour gérer les états de traction des milieux granulaires. Des mécanismes à écoulement plastique parfait ont été ajoutés pour fermer les surfaces de charge déviatoires pour des valeurs de pression

isotrope proche de zéro (§3.5 ). Ces développements sont nécessaires pour des études réalisées sur des structures géotechniques, où des états de traction peuvent se développer numériquement ou encore au cours des itérations de Newton global avant convergence.

L'algorithme d'intégration implicite s'est montré efficace sur l'ensemble des chemins de chargement, avec des performances très intéressantes relevées lors des essais quant à la précision des résultats fournis en comparaison notamment du schéma d'intégration explicite.

La validation des développements a également été entreprise sur l'étude de construction par couches d'une colonne de sol suivie de l'application d'un chargement sismique. L'application du séisme a permis de tester le modèle de Hujeux développé selon un schéma d'intégration implicite pour des chemins de chargement inédits. La gestion des variables internes à évolution discrète du modèle de Hujeux (  $X_k^H$  ) apparaît comme étant une difficulté conduisant à des divergences de résultats relevés entre les deux algorithmes. Néanmoins, les analyses de ces divergences lors de l'analyse sismique de la colonne de sol entre les logiciels Code\_Aster et GEFDyn semblent être en partie liées à la résolution du problème hydromécanique couplé durant la phase sismique en plus du schéma d'intégration du modèle de Hujeux.

La dimension industrielle des développements est aujourd'hui considérée atteinte du point de vue fiabilité, robustesse et efficacité. La construction par couches d'une digue simplifiée homogène a été modélisée, suivie de sa mise en eau puis de l'application d'un chargement sismique à sa base, avec le Code\_Aster. Les résultats fournis par le Code\_Aster ont été comparés et validés pour les phases de chargement quasi-statiques. En parallèle, l'étude du benchmark réalisé en 1992 sur la digue zonée d'El Infiernillo a également été effectuée avec le Code\_Aster. L'étude réalisée par Kham (2009) sur la digue homogène est présentée au §9.7 .

Les premières conclusions relatives à ces études d'envergure confirment la bonne correspondance des résultats entre Code\_Aster et GEFDyn. L'ensemble des études industrielles a été réalisé en utilisant l'opérateur tangent continu du modèle de Hujeux. Cet opérateur apparaît donc adapté pour résoudre les problèmes non linéaires en lien avec le modèle de Hujeux. Néanmoins, les phases de calcul réalisées ne sollicitent pas de singularités du système d'équations non linéaires à résoudre au cours du calcul (les critères permettant de caractériser l'apparition de ces singularités seront présentés au §6 ). Les performances en temps CPU de l'algorithme implicite sont très acceptables aujourd'hui en comparaison des résultats obtenus avec GEFDyn. Pour exemple, la phase de construction de la digue simplifiée nécessite un temps CPU de 1h00 avec Code\_Aster contre 1h00 avec GEFDyn, mais 3h30min pour la mise en eau avec Code\_Aster contre 8min pour GEFDyn. Il faut néanmoins rester vigilant quant à ces valeurs, car elles n'ont pas été établies sur les mêmes machines de calcul et la méthodologie initiée dans Code\_Aster pour la mise en eau n'a pas été optimisée. Cependant, le rapport de temps CPU entre les deux schémas est non négligeable, notamment pour la phase de mise en eau. Comme précisé dans les perspectives du §4.5 , l'intégration d'une méthode de recherche linéaire au sein de l'algorithme local de Newton devrait permettre de diminuer le nombre d'itérations de corrections plastiques et ainsi permettre d'améliorer les vitesses de résolution des problèmes résolus avec le modèle de Hujeux sous un schéma d'intégration implicite.

## 6 Stabilité et bifurcations rencontrées en mécanique des sols

6 Stabilité et bifurcations rencontrées en mécanique des sols.....	95
6.1 Introduction.....	95
6.2 Équations du problème aux limites.....	97
6.2.1 Problème d'évolution dynamique.....	97
6.2.2 Problème formulé en vitesse dans le cas quasi-statique.....	98
6.2.3 Recherche de solutions perturbées.....	99
6.3 Analyse globale de l'évolution du système mécanique.....	101
6.3.1 Existence et unicité du problème en vitesse (cas quasi-statique).....	101
6.3.1.1 Modèles élasto-plastiques associés (ou standard).....	102
6.3.1.2 Modèles élasto-plastiques non associés (non standard).....	102
6.4 Unicité et stabilité des solutions au niveau local.....	102
6.5 Étude de la bifurcation en bandes localisées.....	106
6.5.1 Condition cinématique.....	107
6.5.2 Condition statique .....	107
6.5.3 Loi de comportement.....	107
6.5.4 Condition générale de bifurcation.....	108
6.5.4.1 Cas des lois linéaires.....	108
6.5.4.2 Cas des lois multilinéaires.....	109
6.5.4.2.1 Application au cas bilinéaire.....	109
6.5.4.2.2 Cas général.....	111
6.6 Conclusion sur les critères de stabilité.....	112
6.7 Microstructure et localisation.....	112
6.7.1 Changement d'échelle.....	112
6.7.2 Limite des milieux continus classiques.....	114
6.7.2.1 Épaisseur de bandes de cisaillement indéterminée.....	114
6.7.2.2 Dépendance des résultats numériques au maillage .....	114
6.8 Méthodes de régularisation.....	115
6.8.1 Modèles discontinus.....	115
6.8.2 Modèles continus.....	117
6.8.2.1 Modèles viscoplastiques.....	117
6.8.2.2 Modèles dépendant en espace.....	118
6.8.2.2.1 Modèles à variables régularisées.....	118
6.8.2.2.2 Modèles à gradient de variables internes.....	121
6.8.2.2.3 Milieux continus micromorphiques.....	121
6.8.3 Retour sur les modèles de régularisation.....	125

### 6.1 Introduction

Le présent chapitre traite d'un problème aux limites exprimé en vitesse, plus précisément en taux de variations, appliqué aux structures géotechniques pour des modèles de comportement locaux élasto-plastiques. Ces problèmes ne répondent pas à la définition proposée par Hadamard (1903) des problèmes dits « bien posés » dans le cadre de la mécanique des milieux continus ; les conditions nécessaires pour un problème mathématique « bien posé » reposant sur l'existence, l'unicité et la stabilité des solutions vis-à-vis des conditions initiales.

La notion de stabilité en mécanique non linéaire recouvre une problématique

associée à l'équilibre général d'un système mécanique, mais aussi reliée à l'échelle locale de la relation constitutive. Elle intègre le comportement d'une perturbation dans le système défini à l'aide de critères, qui définissent le comportement ultérieur du système. La condition de stabilité est relative à la sensibilité de la solution du problème dynamique, si elle existe, par rapport aux perturbations. La stabilité au sens de Lyapunov (1907) stipule que les perturbations initiées autour de la position d'équilibre resteront bornées si la solution est stable, ou s'amplifieront pour une solution instable. En revanche introduire, puis retirer une perturbation dynamique dans un système ne garantit pas le retour de l'état du système à la branche de solutions initiale, même si elle est stable.

Les modèles de comportement des sols, les plus proches des résultats expérimentaux proposés dans la littérature, sont construits sur des modèles élasto-plastiques à simple ou multiples seuils plastiques, avec écoulement plastique non associé (Nova, 1982 ; Hujeux, 1985). La conséquence de la prise en compte de tels modèles pour décrire le comportement phénoménologique du matériau est une perte de symétrie du tenseur de rigidité local.

De plus, les résultats expérimentaux montrent un comportement adoucissant de ces matériaux pour divers chemins de chargement, menant alors à des points singuliers sur les courbes de réponse pour les structures étudiées. Ces points singuliers correspondent mathématiquement à des singularités du système d'équations établi pour exprimer l'équilibre du domaine considéré. A ces points singuliers, des bifurcations de solutions peuvent apparaître et différentes branches de solutions peuvent être construites, à partir de la branche fondamentale définie jusqu'ici par les conditions initiales et supposée stable.

L'analyse aux valeurs propres de l'opérateur tangent du système d'équations établi pour exprimer le problème aux limites discrétisé à résoudre permet de détecter ces points singuliers. Le changement de signe du déterminant de l'opérateur tangent correspond au passage d'une branche unique de solutions à des branches de solutions en nombre variable. L'annulation d'une valeur propre de cet opérateur correspond, entre autres, à la perte d'unicité du problème aux limites posé.

Les outils existants pour la détection des bifurcations dues à des effets géométriques ne sont pas applicables aux cas des bifurcations matérielles introduites ci-dessus. En effet, l'opérateur tangent du système n'est alors pas continu dérivable, ce qui rend impossible l'utilisation des critères basés sur la dérivée seconde de l'énergie potentielle, la stabilité de l'équilibre étant définie par le caractère minimum local de l'énergie potentielle (Nguyen, 2000). La perte de continuité de l'opérateur tangent est liée à la phase de transition entre les régimes élastique et plastique du matériau. Les relations locales incrémentales des modèles constitutifs ne sont alors plus différentiables.

Les outils à disposition pour analyser ces modes de bifurcation sont donc restreints aux propriétés de l'opérateur tangent du système d'équations du problème aux limites formulé en vitesse. Les notions d'unicité et de stabilité seront abordées en référence aux travaux antérieurs, à la fois aux niveaux local et global, le tout appliqué aux modèles de comportement élasto-plastique.

Les éléments développés dans ce chapitre ne constituent pas des avancées scientifiques sur le thème de la stabilité des problèmes aux limites rencontrés en mécanique des sols. Ils ont vocation à présenter, sous une vision synthétique, les objets mathématiques permettant de caractériser les phénomènes mis en jeu aux

échelles locale et globale des structures géotechniques étudiées lorsque leurs stabilités sont perdues. Ce chapitre nous permet de justifier le choix des critères de stabilité utilisés par la suite dans le cadre de nos études pour caractériser leurs pertes de stabilité.

## 6.2 Équations du problème aux limites

La première étape consiste à poser convenablement le problème aux limites que l'on cherche à résoudre pour étudier ensuite les propriétés de ses solutions. Le principe de base utilisé pour exprimer les équations d'équilibre du problème posé dans le cadre de la mécanique des milieux continus est le principe des puissances virtuelles. Le problème aux limites est alors écrit sous la forme faible d'un système d'équations aux dérivées partielles.

### 6.2.1 Problème d'évolution dynamique

Le problème consiste à étudier l'évolution dynamique d'un milieu continu, de domaine  $\Omega$  et de frontière  $\partial\Omega$ , supposé à l'équilibre et soumis à une sollicitation entre deux instants  $t_0$  et  $t_1$ . Cette évolution s'écrit sous la forme d'un système d'équations partielles d'ordre 1 :

$$\dot{U}(t) = F(U(t)) \quad (6.1)$$

avec  $U(t)$  le vecteur déplacement des inconnues.

Le problème est ici formulé en petites déformations et restreint aux matériaux non visqueux. Les variables sont exprimées en configuration Lagrangienne et une évolution régulière de l'accélération est supposée. Les équations d'équilibre, exprimées à l'instant  $t$  compris entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ , s'obtiennent au moyen du théorème des puissances virtuelles :

Pour tout couple  $(u^t, \sigma^t)$  et tout champ cinématiquement admissible  $\delta v \in V_0$  :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^t \epsilon_{ij}(\delta v) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \ddot{u}_i^t \delta v_i d\Omega - \int_{\Omega} \rho f_i^t \delta v_i d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\sigma}} t_i^t \delta v_i d\Gamma = 0 \quad (6.2)$$

avec :

$V_0$  : l'espace vectoriel de Hilbert des champs de déplacement admissible, s'annulant sur la frontière  $\partial\Omega_u$  ;

$\Omega$  : le domaine occupé à l'instant  $t$  ;

$\partial\Omega_{\sigma}$  : la partie de la frontière  $\partial\Omega$  où les vecteurs contraintes sont connus. La partie complémentaire  $\partial\Omega_u$  de  $\partial\Omega$  est définie comme suit :  
 $\partial\Omega_u \cup \partial\Omega_{\sigma} = \partial\Omega$  et  $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_{\sigma} = \emptyset$  ;

$\sigma_{ij}^t$  : les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy à l'instant  $t$  ;

$\delta v_i$  : les composantes du champ de vitesse virtuel cinématiquement admissible à l'instant  $t$ . Ces champs admissibles sont restreints aux conditions suivantes : ils doivent être dérivables et  $\delta v_i = 0$  sur  $\partial\Omega_u$  ;

$t_i^t$  : les composantes des vecteurs forces par unité de surface appliqués à l'instant  $t$  ;

$\rho$  : la masse volumique du solide ;

$f_i^t$  : les composantes des forces volumiques appliquées à l'instant  $t$  ;

L'état de contraintes  $\sigma$  est quant à lui obtenu à partir d'une relation incrémentale reliant le taux de contraintes au taux de déformation par l'intermédiaire d'un opérateur élastoplastique tangent,  $\dot{\sigma}_{ij} = H_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}$ . Cet opérateur, tenseur du 4<sup>ème</sup> ordre, dépend de l'état de contraintes et de variables internes actuels.

### 6.2.2 Problème formulé en vitesse dans le cas quasi-statique

Soit une configuration  $\Omega^t$  définie au temps  $t$  et une autre  $\Omega^{t+\Delta t}$  au temps  $t + \Delta t$ , toutes deux à l'équilibre. Le problème exposé se limite à présent à considérer uniquement des sollicitations quasi-statiques monotones, les termes d'inertie n'étant plus pris en compte. On peut alors écrire les égalités suivantes restreintes aux cas des petites déformations (on ne tient pas compte des variations de géométrie de  $\Omega$  durant cet intervalle de temps, soit  $\Omega^t = \Omega^{t+\Delta t} = \Omega$ ) :

Pour tout champ cinématiquement admissible  $\delta v \in V_0$  :

au temps  $t$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^t \epsilon_{ij}(\delta v) d\Omega - \int_{\Omega} \rho f_i^t \delta v_i d\Omega - \int_{\partial\Omega_\sigma} t_i^t \delta v_i d\Gamma = 0 \quad (6.3)$$

au temps  $t + \Delta t$  :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}(\delta v) d\Omega - \int_{\Omega} \rho f_i^{t+\Delta t} \delta v_i d\Omega - \int_{\partial\Omega_\sigma} t_i^{t+\Delta t} \delta v_i d\Gamma = 0 \quad (6.4)$$

La différence entre ces deux équations permet d'obtenir les équations du problème formulé en vitesse lorsque  $\Delta t$  tend vers 0 (Chambon (2004a)).

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij}(\delta v) d\Omega - \int_{\Omega} \rho \dot{f}_i^t \delta v_i d\Omega - \int_{\partial\Omega_\sigma} \dot{t}_i^t \delta v_i d\Gamma = 0 \quad (6.5)$$

où  $\dot{\sigma}_{ij}$ ,  $\dot{t}_i$ ,  $\dot{f}_i$  sont les dérivées temporelles des termes introduits dans l'équation 6.3.

Le problème d'évolution, exprimé au §6.2.1, permet notamment d'appréhender les notions de stabilité des solutions des problèmes aux limites posés. Le paragraphe suivant introduit à ce problème d'évolution une perturbation en déplacement, dont on cherche à analyser la stabilité. Cette approche se définit comme la méthode de perturbation linéaire, où la perturbation introduite est infiniment petite pour pouvoir faire un développement limité.

### 6.2.3 Recherche de solutions perturbées

Soit une configuration  $\Omega^{t_i}$  définie à l'instant  $t_i$  à l'équilibre et soumise à aucune force extérieure. Durant l'intervalle de temps  $[t_i, t_0]$ , aucun point singulier en réponse n'est apparu, ce qui garantit l'unicité des solutions sur cette branche fondamentale. A l'instant  $t_0$ , une perturbation est superposée à la solution et son comportement est analysé. La stabilité du système reste assurée si de petites perturbations produisent uniquement des changements limités de la solution. Un exposant 0 est ajouté à tous les champs correspondant à la solution homogène.

Dans le cadre exposé ci-dessus, nous analysons à présent le comportement des champs perturbés  $u = u^0 + \delta u$  et  $\sigma = \sigma^0 + \delta \sigma$  ( $\delta u \ll u^0$  et  $\delta \sigma \ll \sigma^0$ ).

En considérant la linéarité des termes inertiels, la différence entre les deux équations exprimant le principe des puissances virtuelles pour ces deux champs de solutions (homogène et perturbé) permet d'obtenir la relation suivante sous sa forme faible :

Trouver  $(\delta u, \delta \sigma)$  tel que :

$$\begin{cases} \text{div } \delta \sigma_i - \rho \cdot \delta \ddot{u}_i = 0 \\ \delta \dot{\sigma}_{ij} = H_{ijkl}^0 \big|_u \cdot (\epsilon_{kl}(\delta \dot{u})) \end{cases} \quad (6.6)$$

**Remarque 1 :** La relation précédente est gouvernée par les propriétés de l'opérateur tangent  $H'$ , plus précisément par la dérivée temporelle de droite de l'équation d'état du modèle de comportement, calculé en  $(u, \sigma)$  dans la direction  $\epsilon(\delta \dot{u})$ . Pour la suite de l'analyse, la solution de référence dont on étudie la stabilité sera considérée en permanence en charge. Les décharges élastiques issues de la perturbation sont négligées. Cette restriction limite la validité des résultats au regard des instabilités en dynamique de type flottement, puisque les oscillations induites par ce phénomène peuvent conduire à des décharges du matériau (Benallal et Comi (2002)).

**Remarque 2 :** On ne tient pas compte de la variation de l'opérateur tangent en fonction du champ perturbé  $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}^0 + \delta \dot{\lambda}$ . Ces termes sont utiles pour une analyse fine du point d'émergence de solutions perturbées non bornées. Ils ne sont pas nécessaires en revanche pour caractériser une évolution non bornée de la perturbation. Cette analyse a été menée par Benallal et Comi (2002) dans le cadre des milieux poreux saturés.

A partir du système linéarisé autour de la solution de référence, le problème aux valeurs propres de ce système peut être obtenu directement en supposant des perturbations de la forme générale :  $\delta X = \tilde{X} \exp(i \xi n x + \kappa(t - t_0))$ , avec  $n$  une direction de polarisation (vecteur),  $\xi$  le nombre d'onde de la perturbation et  $\kappa$ , qui peut être relié au taux de croissance de la perturbation dans le temps. Le choix de cette forme est équivalent à l'application de la transformée de Fourier à des champs de déformations polarisées dans l'espace au système homogène présenté en 6.6.

Une évolution non bornée de la perturbation introduite se caractérise par  $|\kappa| \rightarrow \infty$  :



$$\begin{cases} i \xi \tilde{\sigma}_{ij} \cdot n_j - \rho \cdot \kappa^2 \cdot \tilde{u}_i = 0 \\ \kappa \tilde{\sigma}_{ij} = \kappa H_{ijkl}^{t_e} \Big|_u \cdot \tilde{\epsilon}_{kl} \\ \tilde{\epsilon}_{kl} = \frac{i \xi}{2} (\tilde{u}_k \otimes n_l + n_k \otimes \tilde{u}_l) \end{cases} \quad (6.7)$$

Le système présenté en 6.7 peut se réduire à une équation unique contrôlant les déplacements du milieu  $\tilde{u}$  :

$$\xi^2 (n H n) \tilde{u} + \rho \kappa^2 \tilde{u} = 0 \quad (6.8)$$

On obtient alors l'équation aux valeurs propres suivantes :

$$\det[\xi^2 (n H n) + \rho \kappa^2 I] = 0 \quad (6.9)$$

Benallal et Comi (2002) établissent un rapprochement entre la forme des solutions du système perturbé linéarisé et les solutions de la forme ondes harmoniques propagatives, caractérisées par  $\kappa = -i \xi c$ , avec  $c$  la célérité de l'onde. En rejetant le cas  $c \rightarrow \infty$ , ils établissent que les évolutions non bornées des perturbations correspondent à  $\xi \rightarrow \infty$ . Les croissances illimitées ( $\Re(\kappa) \rightarrow \infty$ ) sont définies par la condition nécessaire et suffisante que  $c^2 \leq 0$  ou  $c^2$  est complexe. Une évolution non bornée des perturbations introduites est alors reliée à des discontinuités stationnaires ( $c = 0$ ) ou des instabilités par flottement (fortement liées à l'hypothèse initiale de solide linéaire de comparaison, §6.3.1.1).

Benallal et Comi (2002, 2003) étendent l'approche par perturbation linéaire aux milieux poreux saturés inélastiques sous chargements quasi-statique et dynamique. Ils en dégagent les conditions d'initiation de perturbations croissantes et aussi les conditions d'évolutions non bornées des perturbations. Les conditions de croissance non bornée des perturbations introduites sont similaires à celles présentées ci-dessus (éq. 6.9) pour les chargements dynamiques. Pour le cas de chargement quasi-statique, ils établissent des différences quant aux conclusions à établir.

- Pour un modèle de comportement non associé, des instabilités de flottement peuvent apparaître uniquement sous chargement dynamique.
- En dynamique, les conditions de croissance illimitée se caractérisent uniquement par  $\xi \rightarrow \infty$  (mode localisé). En quasi-statique, des modes diffus peuvent apparaître en conditions non drainées.

En annexe 9.8, une analyse générale des systèmes dynamiques est présentée. Elle est détaillée suivant l'approche continue et également discrétisée selon le schéma d'intégration temporelle de Newmark. On s'intéresse alors pour ce dernier cas au comportement du schéma de Newton à l'introduction d'une perturbation autour de la solution. On peut ainsi dégager des critères d'instabilités divergentes relatifs aux opérateurs discrétisés de raideur du système.

### 6.3 Analyse globale de l'évolution du système mécanique

#### 6.3.1 Existence et unicité du problème en vitesse (cas quasi-statique)

En 1958, Hill propose une condition suffisante d'unicité pour un problème formulé en vitesse. Il considère pour ce problème un solide de volume  $\Omega$ . Il démontre que l'unicité du problème formulé en vitesse est assurée par la condition 6.10, dans le cadre des petites déformations. Hill a énoncé initialement cette condition en grandes transformations.

Pour tout couple de champs de vitesse  $\dot{u}_i^1$  et  $\dot{u}_i^2$  cinématiquement admissible,

$$\int_{\Omega} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} dv > 0 \quad (6.10)$$

où  $\dot{\sigma}_{ij}$  est le taux du tenseur de contraintes de Cauchy associé au taux de déformation  $\dot{\epsilon}_{ij}$ .

Le terme  $\Delta$  correspond à la différence entre deux champs admissibles, c'est à dire :

$$\begin{cases} \Delta \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^2 - \dot{\epsilon}_{ij}^1 \\ \Delta \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^2 - \dot{\sigma}_{ij}^1 \end{cases}$$

Pour un modèle constitutif incrémental linéaire, le tenseur de rigidité ne dépend que de l'état de contrainte et de l'histoire de chargement incrémental du matériau. L'intégration de l'équation 6.10 coïncide avec l'expression du travail du second ordre (notion définie ultérieurement). Par conséquent, l'unicité de la solution sera assurée si et seulement si le tenseur de rigidité est défini positif.

L'équivalence énoncée ci-dessus est en revanche plus difficile à démontrer pour des modèles constitutifs incrémentaux non linéaires.

Chambon et Caillerie (1999) ont travaillé sur ce sujet pour des modèles élastoplastiques à un mécanisme, hypo-plastiques ou à endommagement. Ils ont alors prouvé, tout d'abord à l'échelle locale, que la positivité de la densité du travail du second ordre pour toute vitesse de déformation coïncide avec les termes mis en jeu localement dans l'intégrale de l'équation 6.10 :

Lemme :

$$\begin{aligned} &\text{Si } \forall \dot{\epsilon}_{ij}, \quad d^2 W = \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} > \alpha \|\dot{\epsilon}_{ij}\|^2 \quad \text{avec } \alpha > 0 \\ &\text{alors pour } \forall \Delta \dot{\epsilon}_{ij}, \quad \Delta \dot{\epsilon}_{ij} \Delta \dot{\sigma}_{ij} > \alpha \|\Delta \dot{\epsilon}_{ij}\|^2 \quad \text{et inversement} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Puis, à l'échelle globale, ils en ont déduit que la positivité de la densité du travail du second ordre de tous les points du domaine  $\Omega$  est une condition suffisante d'unicité de la solution du problème formulé en vitesse.

Chambon (2004a) fait également remarquer que ce théorème d'unicité reste vrai pour tout sous-domaine de  $\Omega$  et indépendamment des conditions aux limites.

L'analyse pour déterminer l'unicité des solutions du problème aux limites peut parfois être ramenée à l'étude d'un problème linéaire, où il faut cette fois-ci distinguer pour ces approches les modèles élasto-plastiques à écoulement associé et ceux à écoulement non associé (cf §6.2.3 ).

#### **6.3.1.1 Modèles élasto-plastiques associés (ou standard)**

Les modèles élasto-plastiques associés vérifient la règle de normalité, c'est à dire que l'écoulement plastique issu du modèle constitutif est normal à la surface de charge du modèle constitutif. Ce type de comportement n'apparaît pas comme le plus adapté pour représenter celui des géomatériaux.

En s'intéressant à l'unicité et à la stabilité des solutions issues du problème aux limites considéré, Hill (1958) ne restreint pas son analyse aux seuls modes de déformation générant une localisation des déformations, mais couvre d'autres types de modes tels que les modes diffus par exemple.

Pour simplifier le problème non linéaire lié à l'opérateur tangent du modèle constitutif, Hill introduit la notion de solide linéaire de comparaison. Il s'agit d'un solide linéaire fictif qui, pour toutes les directions de sollicitations, reproduit le comportement en charge du solide élasto-plastique réel. Hill démontre alors que la bifurcation du solide réel ne peut précéder celle du solide linéaire de comparaison.

#### **6.3.1.2 Modèles élasto-plastiques non associés (non standard)**

A la suite des travaux de Hill (1958), la condition suffisante d'unicité a été étendue et généralisée aux modèles élasto-plastiques non associés à simple potentiel plastique par Maier (1970), Hueckel et Maier (1977), Raniecki (1979), Raniecki et Bruhns (1981), ainsi que Bigoni et Hueckel (1991).

Ces auteurs ont introduit de nouveaux solides linéaires de comparaison, à écoulement plastique normal. Deux solides linéaires de comparaison sont définis pour réaliser à présent un encadrement de la charge critique, générant une bifurcation du solide réel.

Le solide linéaire de comparaison permettant d'établir une borne inférieure du chargement engendrant une bifurcation du solide réel répond à la définition d'un matériau standard, dont les propriétés peuvent être modifiées par l'introduction d'un paramètre scalaire. Ce paramètre doit être ajusté pour établir au mieux cette borne inférieure.

Pour la borne supérieure de l'encadrement, le solide linéaire de comparaison considéré est défini de façon analogue aux modèles associés. Le tenseur tangent définissant ce solide fictif correspond alors au tenseur du solide élasto-plastique réel le long du chemin de chargement. Cette borne sera effectivement supérieure, à condition que le mode de bifurcation décelé sollicite bien les points de chargement identifiés comme étant en charge (Chambon (2004a)).

Pour les modèles incrémentaux non linéaires non associés, des modes de bifurcation, qui correspondent à la perte d'unicité de la solution, peuvent apparaître antérieurement aux modes localisés en bandes de cisaillement.

### **6.4 Unicité et stabilité des solutions au niveau local**

Dans ce paragraphe, l'exposé porte sur une synthèse des méthodes d'analyse de la

stabilité matérielle des modèles élasto-plastiques. Les instabilités dues à des effets géométriques (le flambage d'une poutre en est un exemple) et dues à des effets dynamiques (instabilités par flottement induites par des effets d'inertie ou de non-linéarités matérielles) ne sont pas traitées.

Les études menées dans le présent paragraphe se restreignent au cadre des modèles de comportement élasto-plastique, indépendants en vitesse, dont l'expression générale est donnée par la relation suivante :

$$\dot{\sigma}_{ij} = H_{ijkl} \cdot \dot{\epsilon}_{kl} \quad (6.12)$$

avec  $H$  l'opérateur tangent qui est construit à partir de l'histoire de chargement en contraintes et en déformations (état caractérisé par des variables d'état et paramètres d'histoire,  $\alpha$ ). Cet opérateur dépend également de la direction du taux de déformation,  $\dot{\epsilon}$ .  $H$  est symétrique pour les matériaux associés et non symétrique pour les cas non associés.

Les instabilités matérielles rencontrées dans la nature se distinguent suivant deux modes, un mode localisé et un mode diffus. Le mode localisé s'établit théoriquement en recherchant une solution alternative à la solution homogène du problème considéré, faisant apparaître une bande de localisation (cette étude sera abordée ultérieurement au §6.5). Les modes de rupture diffuse ne font pas intervenir de bandes de localisation et sont définis par un champ de déplacement chaotique en espace.

Il est intéressant d'appliquer et d'interpréter ici la définition de stabilité de Lyapunov (1907). La stabilité d'une solution à un problème s'exprime généralement via la définition proposée par Lyapunov (1907). Dans le cadre des milieux continus, la définition peut s'exprimer comme suit : « *L'état de contrainte et de déformation d'un matériau avec une histoire de sollicitations données est dit stable, si pour tout scalaire positif  $\varepsilon$ , il existe  $\eta(\varepsilon)$  de  $\mathbb{R}^+$  tel que, pour tout incrément de sollicitation borné par  $\eta$ , la réponse associée demeure bornée par  $\varepsilon$ .* » (Darve et al. (1995); Bamberger (1981)).

En d'autres termes, toute perturbation apportée à un état limite de contrainte (dit de rupture) conduisant à une réponse totalement différente du mode de déformations précédemment établi est une propriété d'un état instable.

La notion de rupture associée aux matériaux « dits standard » (vérifiant la règle de normalité) correspond à l'existence d'un état limite de contraintes, caractérisé par une déformation indéterminée pour un taux de contraintes nul (palier plastique parfait) :

$$\dot{\sigma}_{ij} = 0 \text{ et } \|\dot{\epsilon}_{kl}\| \text{ indéterminé} \quad (6.13)$$

La condition précédente implique la propriété suivante pour l'opérateur tangent constitutif :

$$\det(H) = 0 \quad (6.14)$$

Cette condition constitue un critère d'instabilité pour les matériaux associés.

La condition de plasticité parfaite définit seulement une direction d'écoulement plastique, mais pas son intensité.

Les analyses classiques de stabilité du domaine des géomatériaux reposent sur ce critère limite de plasticité. Or, dans le cadre de l'élastoplasticité à écoulement plastique non associé, Hill (1962), Thomas (1961), Mandel (1964) et Bigoni et Hueckel (1991) ont montré que des instabilités pouvaient se développer à l'intérieur strict du critère limite de plasticité, telles que le phénomène de liquéfaction des sols par exemple.

Pour réaliser cette analyse, Hill (1958) propose une condition suffisante de stabilité (voir aussi Petryk, 1999). Selon Hill, un état de contrainte-déformation est instable si un processus de déformations pour une direction de chargement donnée peut être engendré et poursuivi sans l'apport d'énergie extérieure (Darve et al., 1995 ; Darve et Laouafa, 2000 ; Darve et al., 2004 ; Darve et Lambert, 2004). La condition de stabilité de Hill indique finalement qu'un état de contrainte-déformation est stable, si pour tout couple  $(\dot{\sigma}, \dot{\epsilon})$  relié par la relation constitutive du matériau, la densité du travail du second ordre est strictement positif :

$$d^2 W = \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} > 0 \quad (6.15)$$

Pour les relations hyperélastique-plastique, le postulat de Drucker (1959) ( $\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0$ ) implique la condition de Hill. En effet, on a  $\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^e > 0$  pour les modèles hyperélastiques et la décomposition classique en élasto-plasticité des déformations en une partie élastique et plastique assure  $\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0$ .

La condition de stabilité énoncée par Hill (1958), également appelée condition de positivité du travail de second ordre, apparaît moins restrictive que celle de Drucker, portant uniquement sur les écoulements plastiques locaux.

Dans le cadre de l'élasto-plasticité associée en petites déformations, Hill (1978) a montré que la positivité du travail du second ordre est assurée tant que le module d'écrouissage  $h > 0$  (cf équation 2.10 du §2.3.4). Dès que le module d'écrouissage prend des valeurs négatives (c'est à dire phase de radoucissement du matériau et perte d'inversibilité de la relation 6.12), la valeur du travail du second ordre est alors négative.

Nova (1994), d'un point de vue d'expérimentateur, s'intéresse aux conditions d'unicité de la réponse homogène d'un problème aux limites qu'est un échantillon de laboratoire. Cet échantillon peut être soumis à des conditions de chargement complexes, imposées par des asservissements en contraintes, en déformations ou mixtes (c'est à dire contrôlabilité de l'essai). Nova a montré que, pour un modèle élasto-plastique à un mécanisme, la perte de contrôlabilité (ou d'unicité) correspond à la perte de positivité du travail de second ordre et à l'annulation du déterminant de la partie symétrique de l'opérateur constitutif élasto-plastique (Ostrowski et Taussky

(1951), cité par Nova, 2004). Ce résultat a par la suite été étendu aux modèles hypoplastiques dans un cas restreint par El Hassan (1997), puis dans le cadre général par Niemunis (2002). Depuis, l'équivalence entre la positivité définie du travail du second ordre et l'unicité a été montrée par Chambon (2004b) (cf lemme 6.11 du §6.3.1).

La condition de stabilité de Hill prend également souvent le nom de critère local d'unicité. En effet, pour une formulation multilinéaire incrémentale des équations de comportement, comme 6.12, les instabilités matérielles détectées à l'aide de ce critère coïncident avec la perte de définie-positivité de la partie symétrique du tenseur constitutif élasto-plastique  $H^s$ . Une condition nécessaire de perte d'unicité est alors :

$$\det(H^s)=0 \quad (6.16)$$

Considérons un modèle élasto-plastique établi à partir d'un critère  $f(\sigma, \alpha) \leq 0$ , fonction des contraintes  $\sigma$  et  $\alpha$  l'ensemble des variables d'écrouissage dont les lois d'évolution sont supposées avoir la forme  $\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \cdot r$ . Un potentiel plastique d'écoulement  $g(\sigma)$  définissant une règle d'écoulement non associée complète la définition du modèle.  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique satisfaisant les relations classiques de Kuhn-Tucker  $\dot{\lambda} \geq 0$ ,  $f(\sigma, \alpha) \leq 0$  et  $\dot{\lambda} \cdot f(\sigma, \alpha) = 0$ .

L'expression explicite de l'opérateur tangent, en condition de charge plastique, est donnée par la relation suivante, à partir de la relation de consistance  $f(\sigma, \alpha) = 0$  :

$$H_{ijkl} = A_{ijkl} - \frac{\left( A_{ijnm} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{nm}} \right) \otimes \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} \cdot A_{rskl} \right)}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{nm}} \cdot A_{nmrs} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}}} \quad (6.17)$$

où  $h$  est le module instantané d'écrouissage ( $h = -\frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot r$ ) et  $A_{ijkl}$  le tenseur élastique.  $H_{ijkl}$  n'est pas symétrique, à moins que le potentiel plastique  $g$  ne coïncide avec le critère  $f$ .

Lorsque  $h$  est négatif, le matériau présente un comportement radoucissant. La valeur seuil de  $h=0$  correspond au cas limite de la plasticité parfaite. Le comportement de « snap-back » est contrôlé par le terme  $\left( h + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{nm}} \cdot A_{nmrs} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}} \right)$ .

Ce phénomène ne peut pas apparaître si on assure la condition  $h > -\frac{\partial f}{\partial \sigma_{nm}} \cdot A_{nmrs} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{rs}}$ . Mróz (1963) a défini des intervalles de valeurs pour  $h$

afin de délimiter le domaine d'unicité de la réponse. Si  $h > h^u$ , l'unicité est assurée pour tout incrément de déformations (et l'inverse si  $h \leq h^u$ ).

Hueckel et Maier (1977) et Maier et Hueckel (1979) ont montré pour ce type de modèle que la perte de positivité du travail de second ordre est liée à une valeur critique du module plastique d'écrouissage :

$$h_{cr}^u = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} : A_{ijkl} : \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right) \cdot \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} : A_{ijkl} : \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right)} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} : A_{ijkl} : \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right] \quad (6.18)$$

Pour le cas de la plasticité à écoulement associé (  $f=g$  ), le module d'écrouissage critique devient égal à zéro :  $h^u=0$  . Pour les matériaux caractérisés par un modèle élasto-plastique non associé, la perte de positivité du travail de second ordre interviendra toujours avant la condition exprimée par la relation 6.14.

## 6.5 Étude de la bifurcation en bandes localisées

Les critères présentés dans cette section permettent d'appréhender les problèmes de bifurcation en bande localisée, phénomène observé largement dans la nature et en laboratoire au cours d'expériences voulues initialement homogènes.

Dans la nature, on peut observer la localisation des déformations au sein des formations géologiques comme les failles et les plissements, par exemple. Les bifurcations observées en laboratoire sur des échantillons initialement homogènes conduisent à la localisation des déformations dans des bandes de cisaillement ou de compaction par exemple. Parmi ces essais, on peut citer les essais uniaxiaux de traction sur les matériaux ductiles (lignes de Lüders) et les essais triaxiaux de compression réalisés sur les sols et les roches. Les essais réalisés sur des échantillons de sol initialement homogènes peuvent être des essais biaxiaux (Vardoulakis, 1980 ; Desrues, 1984 ; Desrues et Chambon, 1986 ; cité par Vossoughi 2001), des essais à l'appareil triaxial (Vardoulakis, 1979 ; Desrues, 1990 ; Vardoulakis et Sulem, 1995 ; Desrues et al. 1996 ; cités par Vossoughi 2001) et des essais à la boîte de cisaillement (Scarpelli et Wood, 1982 cité par Vossoughi 2001).

Une bande de cisaillement est une zone linéaire, d'épaisseur régulière et non nulle, dans laquelle la déformation de cisaillement est relativement forte par rapport à la déformation à l'extérieur de la bande. Il existe une discontinuité de la déformation aux frontières de cette bande, mais le champ de déplacement reste quant à lui continu.

L'enjeu consiste alors à reproduire dans le cadre théorique ces phénomènes naturels. Les premiers travaux relatifs à l'étude théorique de la localisation ont été menés par Hadamard (1903). Ces travaux reposent sur l'analyse de la vitesse de propagation d'ondes d'accélération dans les solides élastiques linéaires. La bande de cisaillement est considérée comme une onde d'accélération stationnaire. La localisation correspond à la transition entre un état où la vitesse de propagation des ondes existe et un état où elle est imaginaire. Par la suite, Thomas (1961), Hill (1962) et Mandel (1964) ont étendu les principes de cette approche dynamique aux matériaux à comportement non linéaire. Ensuite, Rice (1976), Rudnicki et Rice (1975), Hill et Hutchinson (1975) s'y intéressent par une approche quasi-statique et établissent les conditions nécessaires pour que ce phénomène de localisation se produise.

Rice (1976) considère un milieu homogène infini non visqueux. A ce milieu est associée une solution fondamentale d'équilibre, basée sur un champ homogène de contrainte et de déformation. La théorie de la bifurcation consiste à introduire une

solution alternative caractérisée par l'apparition d'une bande de localisation (bifurcation en mode supposé), pour une continuité régulière du chargement. L'équilibre de cette solution doit répondre aux conditions de cinématique et de statique, tout en respectant la loi de comportement du matériau, tant à l'extérieur qu'à l'intérieur de la bande. Ces travaux permettent d'intégrer dans le cadre de la mécanique des milieux continus les concepts de la localisation des déformations.

### 6.5.1 Condition cinématique

Cette première condition est liée au mode de déformation supposé. Elle traduit la discontinuité du champ de déformation entre le milieu à l'intérieur et à l'extérieur de la bande. La solution de base correspondant à la continuité du chargement a un gradient de vitesse noté  $\dot{\mathbf{F}}^0$ . On considère une autre solution faisant intervenir une bande localisée. Thomas (1961) a démontré que la relation reliant le gradient des incréments de déformation à l'intérieur et à l'extérieur de la bande s'écrit de la façon suivante (c'est à dire conditions de compatibilité de Maxwell) :

$$\dot{\mathbf{F}}^1 = \dot{\mathbf{F}}^0 + \mathbf{g} \otimes \mathbf{n} \quad (6.19)$$

où  $\dot{\mathbf{F}}^0$  est le gradient de vitesse de déformations à l'extérieur de la bande,  $\dot{\mathbf{F}}^1$  le gradient de vitesse de déformations à l'intérieur de la bande,  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la bande (direction de polarisation) et  $\mathbf{g}$  un vecteur quelconque, indiquant le fonctionnement de la bande.

### 6.5.2 Condition statique

La seconde condition caractérise la continuité du vecteur contraintes sur le front porté par la bande, exprimée en vitesse. On considère  $\dot{\sigma}^1$  la vitesse de contrainte de Cauchy, par rapport à un repère fixe, à l'intérieur de la bande et  $\dot{\sigma}^0$  le même tenseur défini à l'extérieur de la bande. Le long du front entre le milieu homogène et la bande, on peut écrire :

$$\dot{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n} = \dot{\sigma}^0 \cdot \mathbf{n} \quad (6.20)$$

Chambon (2004a) précise que cette relation n'est pas restreinte au domaine des petites déformations, mais peut être étendu à celui des grandes transformations.

### 6.5.3 Loi de comportement

La relation constitutive d'un matériau défini non visqueux relie la vitesse de contrainte au gradient de vitesse de déformation,  $\dot{\mathbf{F}}$ . Cette relation est supposée être valide aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur de la bande de localisation. Si l'on considère  $\dot{\sigma}$  la dérivée temporelle du tenseur de contrainte de Cauchy par rapport à un repère fixe, cette relation peut s'écrire :

$$\dot{\sigma} = \mathcal{G}(\dot{\mathbf{F}}) \quad (6.21)$$

où  $\mathcal{G}$  une fonction tensorielle non linéaire de tenseur dépendant de l'état.



### 6.5.4 Condition générale de bifurcation

En intégrant la relation constitutive du matériau dans la condition cinématique, puis dans la condition d'équilibre statique, on obtient la relation qui définit comme possible l'existence d'un mode de déformation localisé sous forme de bande de cisaillement. *Une bifurcation en bande est possible si il existe un vecteur normal unitaire  $n$  et un vecteur  $g$  quelconque non nul tels que,*

$$\left[ \mathcal{G}_{ij}(\dot{F}^0 + g \otimes n) - \mathcal{G}_{ij}(\dot{F}^0) \right] \cdot n_j = 0, \forall i \quad (6.22)$$

La relation 6.22 ne fait pas de différences entre l'intérieur et l'extérieur de la bande, puisqu'en posant  $g' = -g$ , elle peut être réécrite à l'extérieur de la bande de la façon suivante :

$$\left[ \mathcal{G}_{ij}(\dot{F}^1 + g' \otimes n) - \mathcal{G}_{ij}(\dot{F}^1) \right] \cdot n_j = 0, \forall i \quad (6.23)$$

#### 6.5.4.1 Cas des lois linéaires

Dans le cas d'étude de Rice (1976), le modèle de comportement local est considéré comme incrémental linéaire. Cette hypothèse permet d'établir une relation linéaire entre la dérivée temporelle du tenseur de contrainte de Cauchy et le tenseur gradient des vitesses :

$$\dot{\sigma}_{ij} = H_{ijkl} \cdot \dot{F}_{kl} \quad (6.24)$$

La condition de bifurcation prend alors la forme suivante :

$$\exists n \neq \vec{0}, \exists g \neq \vec{0} \text{ tels que } (H_{ijkl} \cdot n_j \cdot n_l) \cdot g_k = 0, \forall i \quad (6.25)$$

Cette condition doit être satisfaite pour un vecteur  $g \neq \vec{0}$ . On en déduit alors :

$$\det(Q) = \det(H_{ijkl} \cdot n_l \cdot n_j) = 0 \quad (6.26)$$

Cette condition est souvent appelée condition de bifurcation ou condition de localisation (Rice, 1976). Le critère de Rice s'énonce finalement comme suit. *La bifurcation en bande de cisaillement est possible dès qu'il existe un vecteur unitaire  $n$  tel que,  $\det(n \cdot H \cdot n) = 0$ .*

Remarque 1 : Il faut noter que l'hypothèse d'un comportement incrémental linéaire ne correspond pas aux modèles les plus utilisés pour représenter le comportement des géomatériaux. L'extension de ce critère à d'autres types de modèles est restreinte.

Remarque 2 : Le critère établi est également appelé critère d'ellipticité car, dans le

cadre d'une analyse linéaire, il correspond à la perte d'ellipticité du système d'équations aux dérivées partielles gouvernant l'équilibre local. Il conduit aussi à la perte d'hyperbolicité du problème dynamique associé.

#### 6.5.4.2 Cas des lois multilinéaires

Chambon (1986) a établi, dans un cadre très général, une condition nécessaire de bifurcation en bandes, pour des modèles de comportement applicables au comportement des géomatériaux. Ces modèles sont établis à partir de lois multilinéaires présentées ci-dessous.

La relation linéaire 6.12 établie au paragraphe précédent entre les taux de contraintes et le gradient des vitesses est divisée en  $n$  relations linéaires. Chaque relation linéaire est valable dans une zone tensorielle, représentant un cône et notée  $C^\alpha$ . La relation complète s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\dot{F} \in C^\alpha &\Rightarrow \hat{\sigma} = \mathcal{M}^\alpha : \dot{F} \\ \hat{\sigma}_{ij} &= \mathcal{M}_{ijkl}^\alpha : \dot{F}_{kl} \quad \alpha \in \{0, \dots, n-1\}\end{aligned}\quad (6.27)$$

Une condition supplémentaire de continuité est à ajouter à la relation 6.27 pour une vitesse de déformation le long d'une frontière entre deux domaines  $C^\alpha$  et  $C^\beta$  adjacents :

$$(\mathcal{M}_{ijkl}^\beta - \mathcal{M}_{ijkl}^\alpha) \dot{F}_{kl} = 0 \quad (6.28)$$

Cette condition est nécessaire. Sinon, pour deux directions de chargement proches d'une frontière entre deux cônes, deux réponses radicalement distinctes pourraient être obtenues (Chambon (2004a)).

La condition de bifurcation pour des modèles multilinéaires s'exprime finalement de la façon suivante (Rice, 1976 ; Chambon, 2004a) :

« Si  $C^0$  est le cône auquel appartient  $\dot{F}^0$  et  $C^\alpha$  celui de  $\dot{F}^0 + g \otimes n$ , on peut écrire à partir de la relation 6.23 :

$$\left[ (\mathcal{M}_{ijkl}^\alpha - \mathcal{M}_{ijkl}^0) \dot{F}_{kl}^0 + \mathcal{M}_{ijkl}^\alpha g_k n_l \right] \cdot n_j = 0, \quad \forall i \quad (6.29)$$

. »

La condition de bifurcation 6.29 permet d'introduire ici les notions de bifurcation continue et discontinue au sens de Rice (1976). Une bifurcation continue se définit par un tenseur constitutif matériau identique dans la bande et à l'extérieur de la bande. A l'inverse, une bifurcation discontinue est établie pour deux tenseurs constitutifs différents entre l'extérieur et l'intérieur de la bande.

##### 6.5.4.2.1 Application au cas bilinéaire

Rice et Rudnicki (1980), Borré et Maier (1989) pour des cas particuliers de modèles de comportement, puis Chambon et al. (2000), dans le cadre général des modèles élastoplastiques à simple potentiel plastique, ont démontré la condition nécessaire et suffisante pour l'apparition d'une bande de cisaillement :

« Une bifurcation par bande est possible pour les matériaux bilinéaires si et seulement si le déterminant du tenseur acoustique associé à une zone linéaire est négatif ou égal à zéro, tandis qu'il est positif pour l'autre zone ». Comme habituellement, une des deux zones en décharge équivaut plus ou moins à de l'élasticité indicée 1, le critère de bifurcation par bande devient :

$$\det(\mathcal{M}_{ijkl}^0 \cdot n_i \cdot n_j) \leq 0 \quad (6.30)$$

Le critère de mode de bifurcation discontinue, qui correspond à la perte d'ellipticité des équations, est défini par l'apparition d'une valeur propre nulle du tenseur acoustique.

Remarque 1 : Différents auteurs ont travaillé sur la détermination des conditions de localisation attachées à des modèles incrémentaux bilinéaires tels que Rudnicky et Rice (1975), Runesson et al. (1991), Ottosen et Runesson (1991a, 1991b) et Bigoni et Hueckel (1991), à partir de la méthode des multiplicateurs de Lagrange. D'autres auteurs comme Benallal et Comi (1996), Perrin et Leblond (1993) et Szabó (1994, 1999) ont travaillé sur ces mêmes questions, mais en considérant une méthode géométrique de résolution. Ils ont pu établir des formulations explicites des modules d'écrouissage critique, en fonction des modèles de comportement considérés, qui correspondent à la perte d'ellipticité des équations et à l'existence possible des modes de bifurcations discontinues.

Remarque 2 : Pour des modèles de comportement non associés, le tenseur constitutif tangent et le tenseur acoustique ne sont pas symétriques. Dans ce cas, les parties réelles des valeurs propres du tenseur acoustique sont bornées par les valeurs propres minimale et maximale du tenseur acoustique symétrisé. La perte de définie positivité du tenseur acoustique symétrisé apparaîtra avant la perte d'ellipticité des équations. Ce phénomène correspond à la perte d'ellipticité forte et il a été analysé par Bigoni et Hueckel (1991), Bigoni et Zaccaria (1992a, 1992b), Neilsen et Schreyer (1993), Rizzy et al. (1996) et Szabó (1997) (cité par Szabó, 1999). La condition reposant sur le critère d'ellipticité forte sera toujours atteinte avant le critère de bifurcation discontinue. Elle est donc une condition nécessaire à ce mode de bifurcation. La perte d'ellipticité forte peut conduire également à des modes de bifurcation diffus.

Remarque 3 : Truesdell et Noll (1965) (cité par Bigoni et Petryk, 2002) ont montré que la propagation des ondes planes dans le milieu dépend des valeurs propres du tenseur acoustique  $\mathcal{Q}$ . Les ondes se propagent dans le milieu pour des valeurs propres réelles positives. L'apparition de valeurs propres négatives ou complexes est reliée respectivement à des perturbations divergentes ou de flottement. Les instabilités de flottement sont reliées à l'augmentation des oscillations de perturbations périodiques dans un milieu homogène infini (Rice, 1977 cité par Bigoni et Petryk, 2002).

Remarque 4 : Le critère de bifurcation établi en 6.30 intègre toutes les directions  $n$  conduisant à des valeurs négatives ou nulles du critère. On construit ainsi

l'intervalle des orientations possibles de bandes de cisaillement (Chambon et Moullet, 2004).

#### 6.5.4.2.2 Cas général

Le théorème établi dans le cas d'un modèle bilinéaire n'est pas transposable au cas général des modèles multilinéaires. Il est difficile d'établir la condition nécessaire de bifurcation par bandes pour ce type de modèles.

Chambon (1986) a néanmoins établi le théorème suivant pour les lois multilinéaires :

« Au cours d'un chargement monotone correspondant à une augmentation du scalaire  $\lambda$ , il existe une valeur critique minimum,  $\lambda_c$ , marquant l'initiation d'une bifurcation par bandes, qui correspond à une solution non triviale  $\dot{F}^0 + g \otimes n$ . Cette valeur est telle que cette solution appartienne à une frontière de zone ou bien que  $g$  ait des composantes à valeur infinie. »

Ce théorème a permis pour des lois élasto-plastiques à simple potentiel de retrouver les résultats antérieurs établis par Rice et Rudnicki (1980) et Borré et Maier (1989) (voir expression du théorème ci-dessus). En revanche, ce théorème n'a pas encore été appliqué à des modèles multilinéaires.

Remarque 1 : Lorsque le critère de Rice s'avère vérifié pour une direction de bande  $n$ , alors la condition d'unicité n'est plus valable à l'intérieur de la bande (Nicot, 2008 cité par Prunier, 2008) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(H_{ijkl} \cdot n_j \cdot n_l) = 0, \text{ avec } n \neq 0 \\ \Leftrightarrow \\ \exists g \neq 0, (H_{ijkl} \cdot n_j \cdot n_l) \cdot g_k = 0, \forall i \\ \Rightarrow \\ g_i (H_{ijkl} \cdot n_j \cdot n_l) g_k = 0, \forall i \end{array} \right. \quad (6.31)$$

Or, en supposant un mode de déformation polarisé non nul du type

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{2} (g \otimes n + n \otimes g) \quad (\text{défini symétrique}) :$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} \cdot H_{ijkl} \cdot \dot{\epsilon}_{kl} = \frac{1}{4} (g_i \otimes n_j + n_i \otimes g_j) \cdot H_{ijkl} \cdot (g_k \otimes n_l + n_l \otimes g_k) = g_i \cdot n_j \cdot H_{ijkl} \cdot n_l \cdot g_k \quad (6.32)$$

La relation précédente est établie grâce aux symétries mineures de la matrice constitutive. Dans la bande de localisation, le travail du second ordre s'écrit explicitement :

$$\det(H_{ijkl} \cdot n_j \cdot n_l) = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}_{ij} \cdot H_{ijkl} \cdot \dot{\epsilon}_{kl} = \dot{\epsilon}_{ij} \cdot \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (6.33)$$

## 6.6 Conclusion sur les critères de stabilité

Dans les sections précédentes, trois conditions de bifurcation ont été présentées pour les matériaux élasto-plastiques.

Le premier point à signaler porte sur la nécessité de ne plus prendre en compte le critère limite de plasticité comme critère limite de stabilité, puisqu'il est incapable de détecter des modes de rupture diffuse qui peuvent se déclencher à l'intérieur strict du critère limite de plasticité pour un matériau non associé.

Le second point abordé est en rapport avec la perte de positivité du travail du second ordre, qui peut se produire en phase d'écrouissage positif du matériau, soit avant la possible phase de radoucissement du matériau.

Le troisième point à relever de cette analyse stipule que la bifurcation en bandes ne peut être antérieure au passage du travail de second ordre des valeurs positives aux valeurs négatives. Cette bifurcation sera au mieux, pour les modèles élasto-plastiques associés, simultanée à la perte de positivité du travail de second ordre. Le critère de Hill constitue en soit une borne inférieure des critères de localisation, qui ne peuvent détecter que le mode supposé de bifurcations en bandes.

Les points majeurs cités ci-dessus peuvent être représentés par un diagramme global portant sur les valeurs des modules de plasticité critiques 6.18. En revanche, il n'existe pas de conditions particulières sur le signe de ces modules de plasticité critique.

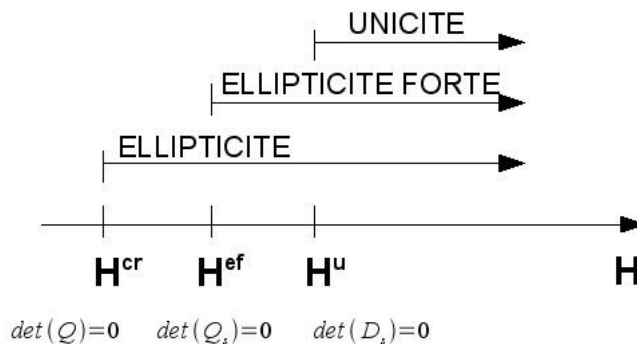


Illustration 6.1 : Critères de localisation en fonction des modules de plasticité critique  
(Besson et al., 2001)

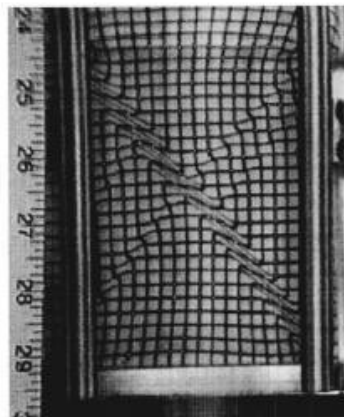
## 6.7 Microstructure et localisation

### 6.7.1 Changement d'échelle

Le phénomène de localisation des déformations vu comme une bifurcation des équations d'équilibre est établi dans le cadre général de la mécanique des milieux continus. La mécanique des milieux continus repose sur l'hypothèse d'un comportement macroscopique homogène du milieu granulaire à l'échelle d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER). Les modèles de comportement associés à cette approche (voir §2.5 ) sont alors définis comme phénoménologiques, formulant directement les phénomènes observés dans le formalisme mathématique approprié. Néanmoins, à l'échelle plus fine des grains, les déformations inélastiques

constatées au cours de l'histoire de chargement sont le résultat de mouvements relatifs inter-granulaires, loin d'être homogènes à l'échelle du VER. Ces mouvements relatifs du type glissement intergranulaire, rotation ou même écrasement de grains, produisent en dessous d'une échelle de longueur ou de taille des déformations discontinues. Cette échelle est en générale nommée échelle microscopique. Il existe dans la littérature d'autres méthodes telles que des approches multi-échelles permettant de construire le comportement macroscopique du matériau à partir d'une description locale du milieu. Ces approches peuvent alors utiliser des techniques d'homogénéisation ou encore des méthodes numériques basées sur les éléments discrets (voir Nicot et Darve (2005) pour des références sur ces sujets de recherche) .

Pour une structure, dont la taille est grande par rapport à l'échelle des grains, un chargement homogène engendre des déformations plastiques. Elles peuvent être considérées comme homogènes à l'échelle macroscopique tant que le seuil critique de localisation des déformations n'est pas atteint. Ce seuil critique correspond à l'initiation de la localisation des déformations à l'échelle macroscopique, phénomène retrouvé dans l'approche théorique exposée ci-dessus (§6.5 ). La localisation des déformations en bandes de cisaillement se concentre sur une largeur de bande faible, valeur proche de la taille caractéristique de la microstructure du géomatériau. Ce phénomène a été largement observé expérimentalement, relevant notamment que la largeur de la bande de cisaillement est fonction de la taille des particules du milieu granulaire (Roscoe (1970), Vardoulakis (1974), Vardoulakis et al. (1978), Muhlhaus et Vardoulakis (1987) cité par Nicot et Darve (2005)) et de leur forme (Desrues et Viggiani (2004)).



*Illustration 6.2 : Essai biaxial de compression sur sable (Alshibli et al., 2003)*

Dès l'initiation de la localisation des déformations en bandes de cisaillement, d'importantes déformations inélastiques se concentrent à l'intérieur de la bande, alors que les zones de matériau comprises entre les bandes de cisaillement se déforment très peu (Desrues et Viggiani (2004), Hall et al. (2010)). Le comportement de l'échantillon à l'échelle macroscopique est alors gouverné par le comportement adoucissant du matériau à l'intérieur de la bande. Les phénomènes micro-mécaniques locaux jouent alors un rôle prépondérant dans la réponse macroscopique de la structure.

## 6.7.2 Limite des milieux continus classiques

### 6.7.2.1 *Épaisseur de bandes de cisaillement indéterminée*

Un milieu continu homogénéisé peut uniquement reproduire le comportement macroscopique du matériau. Cette limitation de la théorie classique des milieux continus apparaît lorsque les équations gouvernant le problème d'évolution étudié perdent leur caractère elliptique (Benallal et al., 1989), c'est à dire avec l'initiation de solutions alternatives engendrant une localisation des déformations en bandes de cisaillement. Après ce point critique de perte d'ellipticité des équations, il est commun d'employer le terme « régime de post-localisation » pour désigner le comportement de la structure. Les études d'instabilités générant une localisation des déformations présentées dans le paragraphe §6.5 permettent d'établir l'intervalle des angles d'inclinaison de ces bandes de cisaillement dans le milieu et les modules d'écrouissage critiques propres aux différents modèles constitutifs locaux (Remarque 1 du §6.5.4.2 ). En revanche, les modèles élasto-plastiques utilisés ne permettent pas de décrire l'évolution du système mécanique au delà de l'initiation. Les équations gouvernant l'équilibre sous forme incrémentale ne contiennent pas de paramètre intrinsèque ayant la dimension d'une longueur. L'absence de cette grandeur dans les modèles constitutifs conduit à l'incapacité d'établir la taille de la largeur de bandes de cisaillement. Cette valeur reste indéterminée, ce qui conduit à l'impossibilité de décrire avec la théorie classique des milieux continus le régime de post-localisation (Benallal et al., 1988, 1989).

### 6.7.2.2 *Dépendance des résultats numériques au maillage*

La modélisation par la méthode des éléments finis modifie le problème posé sur l'incapacité à définir la taille des zones de localisation. L'approche par éléments finis classique impose que les champs de déplacement et de déformation restent continus au sein de chaque élément. Les discontinuités des champs de déformations sont alors repoussées aux frontières des éléments. Une longueur caractéristique apparaît alors naturellement lors de l'approximation éléments finis : la taille des éléments. Il est alors possible de poursuivre un calcul en régime de post-localisation où les déformations sont alors confinées au sein d'un groupe limité d'éléments. La dissipation est également restreinte à ce groupe d'éléments et reste bornée. Lorsqu'un raffinement de maillage est envisagé, la zone de localisation diminue avec la taille des éléments ; la dissipation est alors confinée dans un volume tendant vers zéro, ce qui conduit à une valeur limite égale à zéro pour la dissipation. Une structure peut alors, si la taille de ses éléments tend vers zéro, atteindre sa ruine sans dissiper d'énergie (Needleman et Tvergaard, 1984 ; Bažant, 1986 ; Armero et Garikipati, 1995 ; cités par Vossoughi 2001).

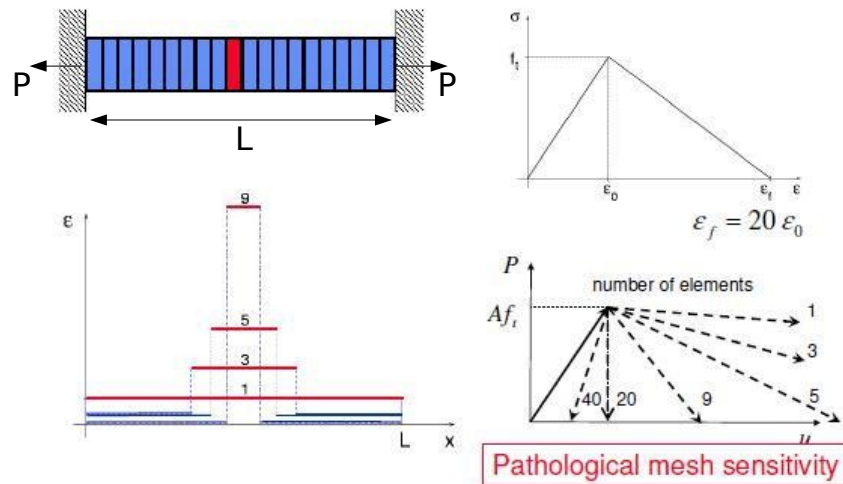


Illustration 6.3 : Effet pathologique de dépendance au maillage des résultats (Jirásek, 2007)

La dépendance pathologique de la solution à la discrétisation spatiale est directement liée à l'absence de longueur interne dans les modèles continus locaux classiques. L'idée consiste à proposer des approches permettant de définir un problème aux limites bien posé dans le régime de post-localisation. Les approches envisagées devront faire intervenir une longueur caractéristique influençant la répartition spatiale de la densité de dissipation volumique, donc contrôlant la dépendance de la solution du problème discret à la taille des mailles des éléments finis. Pour définir les différentes approches exposées dans le prochain paragraphe, il est commun de parler de méthodes « limiteurs de localisation ».

## 6.8 Méthodes de régularisation

Les difficultés associées aux modèles de comportement adoucissants sont directement liées à un changement de nature des équations du problème : perte d'ellipticité pour une analyse quasi-statique, perte d'hyperbolicité pour une analyse dynamique. Dans le but de caractériser le problème de localisation des déformations et poursuivre les études dans le domaine de la post-localisation, de nombreux auteurs ont développé des solutions alternatives, plus ou moins physiques, à l'approche classique des milieux continus générant des problèmes numériques de sensibilité au maillage. Les méthodes envisagées se distinguent suivant deux voies d'approche. La première consiste à intervenir au niveau du modèle numérique et la seconde intervient dès l'écriture du modèle continu de façon à limiter les solutions à un nombre fini.

### 6.8.1 Modèles discontinus

Une première voie d'approche permet d'introduire une cinématique discontinue au sein même de la discrétisation par éléments finis. Elle se justifie par le fait que la perte d'hyperbolicité (problème dynamique) entraîne l'apparition d'une discontinuité stationnaire, front sur lequel les contraintes ont un taux discontinu,  $\llbracket \dot{\sigma} \cdot n \rrbracket \neq \vec{0}$ . On retrouve notamment sous ce label deux types d'approches par éléments finis :



- les éléments d'interface, encore connus sous le nom de modèles cohésifs. Ces modèles sont construits sur l'idée d'associer une force d'interaction cohésive à un saut de déplacement généré par l'écartement des lèvres d'une fissure. Cette force d'interaction contrôle une zone de transition où l'écartement des lèvres de la fissure évolue progressivement (pour plus de détails, voir les travaux de Laverne (2004) par exemple).
- des modèles d'interface pour la modélisation du contact sol granulaire-structure ont été développés. La zone de localisation des déformations est considérée comme une zone de contact ou d'interface entre deux solides. Le milieu intérieur à la bande de cisaillement a un modèle de comportement distinct de celui extérieur à la bande. Des conditions de continuité en déplacements et contraintes sont ajoutées pour assurer l'équilibre. Chambon et Crochepeyre (1998) ont développé le modèle d'interface Daphnis. Le modèle Daphnis est exprimé en grande transformation. Il est construit de telle sorte à assurer une transition consistante entre le modèle extérieur à la bande (modèle CloE, Chambon et al., 1994) et le modèle à l'intérieur de la bande Daphnis à la frontière de la bande. Le modèle Daphnis introduit un comportement adoucissant dans la bande de localisation traduisant une dégradation des propriétés mécaniques dans cette zone, en particulier une diminution de la densité du matériau. Le modèle Daphnis est basé sur la notion d'indice des vides critique.
- les éléments à surface de discontinuité interne, où l'apparition de surfaces de discontinuité du champ de déformation ou du champ de déplacement est permise par l'enrichissement de la cinématique du milieu continu.
  - Les modèles à discontinuité faible ont été introduits initialement par Pietruszack et Mróz (1981), puis Ortiz et al. (1987) (cité par Brancherie, 2003) et Leroy et al. (1987). Ces travaux sont ensuite repris pour une extension aux éléments à quatre nœuds (Belytschko et al., 1988 ; Klisinski et al., 1991). Les éléments finis développés dans ce cadre autorisent l'apparition de discontinuités du champ de déformation à l'intérieur des éléments.
    - La méthode développée par Ortiz et al. (1987) est basée sur une étude de localisation au sein de chaque élément. Lorsqu'un mode de localisation est détecté, la base des fonctions de forme de l'élément est enrichie, autorisant une discontinuité de déplacement au sein de l'élément. Les degrés de liberté supplémentaires introduits, étant propres à chaque élément, sont éliminés au niveau global du calcul par condensation statique élémentaire. Cette méthode présente néanmoins l'inconvénient de ne tolérer qu'une surface de discontinuité par élément, ce qui rend finalement dépendantes les réponses à la taille des éléments.
    - Les travaux de Belytschko (Belytschko et al., 1988) sont basés sur l'introduction d'une bande de localisation au sein d'un élément. La largeur des bandes de localisation est donnée et doit rester inférieure à la taille des éléments, imposant donc une taille minimale pour les éléments. Sluys (1997) a démontré pour ces modèles l'indépendance des solutions à la taille des mailles, mais une dépendance à l'orientation des mailles persiste.
  - Les modèles à discontinuité forte introduisent une discontinuité du

champ de déplacement, conduisant à un champ de déformation singulier au sein de l'élément. Les premiers travaux sur ce sujet ont été menés par Dvorkin et al. (1990), Klisinski et al. (1991) (cités par Brancherie (2003)), Larrson et al. (1993), Simo et al. (1993), Armero et Garikipati (1995), Regueiro et al. (1998) (cité par Vossoughi, 2001). Jirásek (2000) propose notamment une revue des techniques numériques mises en place pour traiter la discontinuité du champ de déplacement. La régularisation des équations est alors assurée par une longueur caractéristique nulle. L'énergie dissipée est donc concentrée dans des bandes de localisation à épaisseur nulle. L'objectif n'est plus de décrire finement les bandes de localisation, mais simplement de prendre en compte leurs effets sur la réponse globale de la structure.

Les approches discontinues ne cherchent pas à décrire finement le comportement micromécanique des zones de localisation et notamment les déformations volumiques relevées expérimentalement dans ces zones de glissement (Vardoulakis et Sulem, 1995). La variation volumique doit jouer un rôle dans les problèmes de couplage hydromécanique (chemin préférentiel d'écoulement). Il apparaît donc nécessaire d'en modéliser finement le comportement. Cette remarque permet d'introduire la deuxième voie d'approche pour régulariser les problèmes de localisation.

## 6.8.2 Modèles continus

La seconde voie d'approche pour traiter les problèmes liés à la localisation des déformations est basée sur une écriture enrichie du modèle continu, introduisant une dépendance explicite en temps ou en espace du comportement local du matériau. Les termes complémentaires à l'approche classique conduisent à introduire un certain nombre de coefficients, qu'on peut rendre homogènes à des longueurs : ce sont des longueurs dites internes, ou caractéristiques du matériau. Les sections suivantes présentent des exemples de travaux de recherche orientés selon ce concept.

### 6.8.2.1 Modèles viscoplastiques

L'utilisation de matériau avec un comportement dépendant explicitement du temps (*rate dependent*) assure au problème quasi-statique de ne pas perdre son ellipticité lors du phénomène de localisation des déformations. Ces comportements permettent également de maintenir les ondes dont les célérités sont dans le domaine des valeurs réelles pour des sollicitations dynamiques. La localisation des déformations en bandes de cisaillement est alors interprétée comme un phénomène issu de la dynamique. Cette méthode résout le problème de dépendance aux maillages des résultats en introduisant une longueur caractéristique même si l'écriture constitutive du modèle n'en contient pas. La dépendance en temps du modèle est introduite via un paramètre de viscosité. Cette approche a été développée dans le cadre des matériaux élastoplastiques par Needleman (1988). De Borst et al. (1993) (cités par Fernandes, 2009a) montrent d'ailleurs que cette approche, dans le cadre des sollicitations dynamiques, est une des méthodes les plus performantes pour assurer une indépendance des résultats au maillage.

Les difficultés liées à ce modèle relèvent du choix du paramètre de viscosité, qui ne représente pas a priori une propriété du matériau, mais plutôt un paramètre

numérique de régularisation. L'application de cette méthode aux chargements quasi-statiques n'est pas des plus aisées, puisqu'il est nécessaire de considérer le temps comme un paramètre physique. De plus, d'après Forest et Lorentz (2004), cette méthode ne permet pas d'assurer une indépendance des résultats à l'orientation des mailles, comme montrée pour la simulation d'une plaque trouée.

De plus, des problèmes liés à la résolution numérique subsistent et varient selon les schémas d'intégration en temps. Lorentz (1996) en donne notamment des exemples liés à des conditions de finesse de discrétisation en temps ou en espace selon les schémas. Les schémas totalement explicites nécessitent une grande finesse en temps et en espace (Pitman, 1995). Les schémas totalement implicites imposent, pour garder le caractère hyperbolique des équations d'équilibre incrémentales, un pas de temps inférieur à une valeur critique (Simo, 1988). Enfin, pour les modèles de comportement intégrés analytiquement, des conditions de stabilité apparaissent également portant sur la finesse du maillage (Loret et Prévost, 1990 ; Prévost et Loret, 1990).

### **6.8.2.2 Modèles dépendant en espace**

Les modèles dépendant en espace correspondent à une approche continue enrichie. Les équations constitutives, appliquées en tout point du domaine, sont modifiées par l'ajout d'un paramètre de longueur interne. Les modèles cités dans cette section sont les modèles à variables régularisées, les modèles à gradient de variables internes et les milieux continus enrichis en gradient de déformations.

#### **6.8.2.2.1 Modèles à variables régularisées**

Les approches relatives à ce concept considèrent la réponse d'un point du milieu comme dépendante de la réponse des points voisins. Cette dépendance est introduite sur les variables liées à l'évolution plastique du matériau, telles que le champ de déformation ou des variables internes des modèles constitutifs. La variable locale considérée est alors remplacée par sa valeur « enrichie » au sein de la loi de comportement du milieu, au sein de la loi d'évolution pour des variables internes, ou encore dans l'énergie potentielle elle-même. La valeur « enrichie » d'un champ régularisé est établie en prenant en compte les valeurs du champ considéré confiné à une zone d'influence spatiale autour du point matériel considéré. L'opérateur de délocalisation peut intervenir sous différentes formes, telles qu'une intégrale ou à travers l'introduction de gradients d'ordre supérieur, dont les contributions énergétiques finies vont contrôler les localisations des champs de variables.

### **Modèles non locaux**

Les modèles non locaux ont été appliqués initialement au milieu continu dans les années 1960 par différents auteurs tels que Kröner (1968), Kunin (1968), Krumhansl (1968), Eringen et Edelen (1972), cités par Pijaudier-Cabot et Bažant (1987). L'idée première de l'approche non locale a consisté à considérer un état de contraintes en un point comme fonction de l'état de déformations d'un volume d'influence autour du point considéré, par le biais d'un terme intégral. La longueur caractéristique introduite via ce volume d'influence était alors interprétée comme un paramètre matériau reliant la microstructure au milieu continu. Il subsistait néanmoins deux inconvénients à ces premiers modèles :

- Le modèle non local s'applique pour toutes les situations de chargement :

élastique, charge et décharge élastoplastique.

- Des modes de dissipation d'énergie égale à zéro apparaissent et nuisent à la convergence des calculs.

Pijaudier-Cabot et Bažant (1987) appliquent l'approche non locale aux modèles d'endommagement en régularisant cette fois uniquement la variable d'endommagement du modèle. La partie élastique du comportement est ainsi séparée des considérations non locales. L'application de l'approche non locale uniquement sur un ou plusieurs paramètres liés à la localisation des déformations a l'avantage de maintenir l'état de contraintes solutions des équations différentielles standard. Ces équations différentielles sont responsables de l'équilibre et des conditions aux limites standard appliquées aux frontières du domaine d'étude.

En notant  $f(x)$  un champ de variables locales du modèle sur le domaine  $\Omega$ , le champ de variables non locales associé  $\bar{f}(x)$  est obtenu via l'expression :

$$\bar{f}(x) = \int_{\Omega} \omega(x, s) f(s) ds \quad (6.34)$$

où  $\omega(x, s)$  est une fonction de pondération dépendant du point considéré.

Pour les applications aux modèles adoucissants, il est souvent requis d'utiliser une fonction de pondération normalisée pour ne pas altérer les champs solutions uniforme.

La plupart des modèles non locaux considère cette fonction de pondération comme une gaussienne :

$$\omega(x, s) = \exp\left(\frac{-\|x-s\|^2}{2l_c^2}\right) \quad (6.35)$$

Le paramètre  $l_c$  correspond à la longueur caractéristique du modèle non-local.

Néanmoins, pour tenir compte de l'anisotropie d'un matériau créée par l'endommagement, certains auteurs (Bažant (1994), Planas et al. (1994), cités par Strömberg et Ristinmaa, 1996) proposent d'utiliser des fonctions de pondération privilégiant une direction de l'espace et non des fonctions volumes isotropes. Le choix de la fonction de pondération joue un rôle important sur la réponse du modèle et reste un point délicat de cette technique.

Strömberg et Ristinmaa (1996) utilisent également une approche non locale pour le modèle de comportement élastoplastique avec écrouissage et seuil de Von Mises, mais uniquement pour les régimes plastiques adoucissants. Le paramètre d'écrouissage isotrope du modèle est défini par une formulation mixte locale/non locale en fonction du régime de plasticité.

Une autre voie d'extension de cette approche a été menée par Comi (2001) qui a introduit des longueurs caractéristiques différentes selon le type de chargement : compression ou traction.

Bažant et Jirásek (2002) proposent une revue détaillée des différents travaux de recherche menés dans le cadre des modèles non locaux à formulation intégrale.

La mise en place de cette méthode dans un logiciel par éléments finis ne semble pas aisée, même si les équations d'équilibre restent classiques. L'estimation de l'état de contraintes et du comportement tangent en un point d'intégration dépend des autres points d'intégration, ce qui pose un problème pour l'architecture de la

plupart des logiciels d'éléments finis.

### Modèles à gradient

Les modèles non locaux à gradient interviennent dans la formulation du modèle constitutif du matériau, plus exactement au niveau de la fonction seuil par l'introduction du Laplacien d'une variable d'écrouissage du modèle. Dans la pratique, ces modèles font appel à la résolution d'une équation différentielle supplémentaire (Peerlings et al., 2001). On distingue pour ce type d'approche les modèles à formulation explicite et les modèles à formulation implicite.

### Modèles à formulation explicite

Ces modèles sont basés sur l'écriture d'un développement en série de Taylor d'un champ local à régulariser autour du point matériel. L'expression de l'équation à dérivées partielles à résoudre prend la forme suivante, avec  $\nabla^2$  l'opérateur Laplacien :

$$\bar{f}(x) = f(x) + l_c^2 \nabla^2 f(x) \quad (6.36)$$

Ces modèles ont été initialement appliqués au comportement matériau élastoplastique à écrouissage négatif, notamment par Mühlhaus et Aifantis (1991), De Borst et Mühlhaus (1992) et Sluys et al. (1993). La surface de charge du modèle ne dépend plus seulement de la plasticité cumulée mais également de son Laplacien. L'équation de consistance du modèle aboutit alors à une équation aux dérivées partielles en espace au lieu d'une équation algébrique. Il est nécessaire d'introduire des conditions aux limites supplémentaires sur le multiplicateur plastique. Ces conditions aux limites sont difficiles à établir, car exprimées aux frontières de la zone de localisation a priori non déterminées. Cette approche a ensuite été étendue aux modèles d'endommagement par Peerlings et al. (1996) et Askes et Sluys (2002).

Une première limitation de ce type de modèles impose au champ local d'être suffisamment régulier pour assurer la convergence de la série de Taylor (nécessité d'utiliser des fonctions de forme  $C^1$ ). De plus, la dérivée seconde introduite porte uniquement sur le champ local qui produit une interaction spatiale à une distance infinitésimale (Peerlings et al. (2001)). Le caractère non local de ce modèle peut être conservé sous cette formulation, si le développement de la série de Taylor appliqué au champ local n'est pas tronqué (Peerlings et al. (2001)).

Askes et Sluys (2002) ont également travaillé sur une formulation explicite au 4ème ordre. Ils constatent l'apparition d'instabilités dans les domaines d'écrouissage positif et négatif. Ils mettent également en avant un changement qualitatif et quantitatif de la réponse entre les formulations explicites du 2ème et 4ème ordre (Askes et al., 2000).

### Modèles à formulation implicite

Le principe de ces modèles, développés dans le cadre des modèles d'endommagement (Peerlings et al., 1996), n'est plus de calculer le champ non local à partir du champ local et de ses dérivées, mais d'imposer au champ non local d'être solution d'une équation différentielle d'ordre 2. Cette équation est établie à partir de la formulation explicite (éq.6.36) en la dérivant deux fois et en l'introduisant

dans le développement en série de Taylor de la variable locale, limitée à l'ordre 2. Des conditions aux limites supplémentaires doivent être ajoutées pour assurer l'unicité de la solution :

$$\begin{cases} \bar{f}(x) - l_c^2 \nabla^2 \bar{f}(x) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial \Omega \end{cases} \quad (6.37)$$

L'utilisation de cette méthode assure un caractère non local, puisque les gradients d'ordre supérieurs au champ local sont implicitement contenus dans le gradient du champ non local (Peerlings et al., 2001). Ces modèles sont proches des modèles non locaux à formulation intégrale pour une fonction de pondération  $\omega$  égale à la fonction de Green, solution de cette équation aux dérivées partielles pour une distribution de Dirac.

Askes et Sluys (2002) réalisent également une étude comparative sur les formulations implicites à gradient non local à l'ordre 2 et l'ordre 4. Leurs résultats montrent que la prise en compte de gradient d'ordre supérieur modifie quantitativement la réponse, qui tend vers la solution obtenue avec une approche intégrale non locale. Ils relèvent également une largeur de la bande tendant vers zéro, lorsque l'endommagement du matériau atteint son niveau maximum. Le cheminement vers une modélisation discrète de la zone d'endommagement en est alors plus que légitime.

Godard (2005) propose une extension du modèle de Peerlings et al. (1996) à tous les modèles de comportement d'endommagement exprimés dans l'espace des déformations. L'idée consiste à régulariser toutes les composantes du tenseur de déformations et non plus seulement un champ scalaire (déformation équivalente).

#### 6.8.2.2 Modèles à gradient de variables internes

Andrieux et al. (1996) proposent, dans le cadre des modèles d'endommagement, une approche consistant à introduire dans l'énergie libre des termes en déformation, en endommagement et en gradient de l'endommagement. Ils introduisent une loi phénoménologique à l'échelle microscopique et passent à l'échelle macroscopique via une étape d'homogénéisation. Cette technique permet de déterminer un modèle de comportement homogénéisé à l'échelle macroscopique, dépendant de caractéristiques mécaniques à l'échelle microscopique. Lorentz (1999) montre que le second principe de la thermodynamique exprimé à l'échelle de la structure est bien vérifié dans le cadre de cette approche. L'application numérique de ce modèle a été réalisée par Lorentz et Benallal (2005) qui proposent un algorithme du type Uzawa robuste mais lent et difficile à implanter dans un code par éléments finis. Lorentz (2008) propose par la suite un autre algorithme préservant l'architecture initiale d'un code de calcul par éléments finis et garantissant un temps de calcul acceptable. Les résultats obtenus montrent une indépendance au maillage en espace et en orientation pour des trajets de chargement complexes, générant des chemins d'endommagement non définis a priori.

#### 6.8.2.3 Milieux continus micromorphiques

Les effets du comportement de la microstructure des matériaux peuvent également être traités via une extension des milieux continus généralisés. Cette théorie a été

développée initialement par Toupin (1962) et Mindlin (1964, 1965) dans le cadre de l'élasticité linéaire puis généralisée par Germain (1973a). L'écriture des milieux micromorphiques consiste à enrichir la cinématique du milieu par l'ajout d'un tenseur du second ordre, qui modélise les déformations et les rotations de la microstructure du milieu étudié. Chambon et al. (2001) ont constitué une formulation générale de cette théorie dans le cadre de l'élasto-plasticité en petites déformations.

Ce tenseur du second ordre, de composantes notées  $f_{ij}$ , est appelé gradient cinématique microscopique et est non-symétrique. Ce champ n'est pas relié au gradient de déplacement  $u_i$ , qui est considéré propre à l'échelle macroscopique. Ce tenseur peut être décomposé en une partie antisymétrique et une partie symétrique. Le champ associé à la partie antisymétrique s'apparente aux micro-rotations du milieu,  $r_{ij}$ , et le champ de la partie symétrique aux micro-déformations pures,  $d_{ij}$ . Le champ des micro-déformations pures peut également être décomposé à son tour en une partie hydrostatique,  $\chi$ , et une partie déviatorique,  $d_{ij}^{dev}$ . Il est de plus nécessaire d'introduire le gradient des déformations microscopiques, de composantes  $h_{ijk}$ .

$$\begin{cases} r_{ij} &= \frac{1}{2}(f_{ij} - f_{ji}) \\ d_{ij} &= \frac{1}{2}(f_{ij} + f_{ji}) = \chi \delta_{ij} + d_{ij}^{dev} \\ h_{ijk} &= \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} \end{cases} \quad (6.38)$$

avec  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker.

Le principe des travaux virtuels est utilisé pour décrire les équations d'équilibre. Il est nécessaire d'associer aux variables cinématiques des variables statiques duales. Les tenseurs de contraintes introduits sont liés respectivement aux déformations macroscopiques, aux déformations relatives (c'est à dire la différence entre le gradient des déplacements macroscopiques et le gradient cinématique microscopique) et au gradient des déformations microscopiques. L'expression du principe des travaux virtuels prend finalement l'expression variationnelle suivante :

Pour tout champ cinématiquement admissible  $(u_i^*, f_{ij}^*)$ ,

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij}(u_i^*) + \tau_{ij} (f_{ij}^* - \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}) + \Sigma_{ijk} h_{ijk}) dv = \int_{\Omega} G_i u_i^* dv + \int_{\partial\Omega} t_i u_i^* + T_{ij} f_{ij}^* ds \quad (6.39)$$

$\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes macroscopiques,  $\tau_{ij}$  est appelé tenseur des contraintes microscopiques et  $\Sigma_{ijk}$  le tenseur de doubles contraintes.  $t_i$  et  $T_{ij}$  sont respectivement les forces de traction et les doubles forces appliquées sur la frontière  $\partial\Omega$ .  $G_i$  représente les forces de volume appliquées sur  $\Omega$ . Aucune double force de volume n'intervient ici dans l'expression du travail virtuel extérieur. Pour une formulation complète intégrant ces éléments, se référer aux travaux de Germain (1973b).

Les équations d'équilibre local sous forme forte prennent finalement l'expression suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\sigma_{ij} - \tau_{ij})}{\partial x_j} + G_i = 0 \\ \frac{\partial \Sigma_{ijk}}{x_k} - \tau_{ij} = 0 \end{cases} \quad (6.40)$$

et les conditions aux limites naturelles en contraintes :

$$\begin{cases} (\sigma_{ij} - \tau_{ij}) n_j = t_i \\ \Sigma_{ijk} n_k = T_{ij} \end{cases} \quad (6.41)$$

avec  $n_j$  le vecteur normal à la frontière  $\partial\Omega$ .

La complexité des milieux micromorphiques a restreint l'utilisation de ce modèle et beaucoup de scientifiques ont cherché à simplifier l'expression de ces milieux, en vue d'une exploitation informatique. Les différentes restrictions apportées sont présentées par Forest et Sievert (2006) qui en donnent une vue d'ensemble triée en fonction du nombre de degrés de liberté introduits dans la description du champ cinématique. Fernandes (2009a) en tire le tableau 6.1 qui présente les différents modèles existants ayant pour origine les milieux micromorphiques.

Nom du milieu	Nombre de ddls supplémentaires	Décomposition des micro-transformations		
		Micro-rotations	Micro-déformations pures	
			Hydrostatique	Déviatorique
		$r_{ij}$	$\chi$	$d_{ij}^{dev}$
Microdilatation	1	non	oui	non
Micropolaire	3	oui	non	non
Microstretch	4	oui	oui	non
Microstrain	6	non	oui	oui
Micromorphique	9	oui	oui	oui

**Tableau 6.1 : Hiérarchisation des milieux à microstructure en fonction du nombre de degrés de liberté ajoutés (Fernandes, 2009a)**

Les milieux à microdilatation sont la forme la plus dégénérée des milieux micromorphiques en conservant de la formulation d'origine uniquement la partie hydrostatique des microdéformations pures,  $\chi$ . Ces milieux, restreints à la formulation en second gradient, ont été développés et implantés par Fernandes et al. (2009b) dans le logiciel Code\_Aster. La restriction des milieux à microdilatation au modèle de second gradient de dilatation s'obtient en assumant l'égalité entre la microdilatation  $\chi$  et la déformation volumique macroscopique  $\epsilon_v$ . Fernandes (2009a) a notamment travaillé sur le cas de consolidation unidimensionnel de Terzaghi d'une colonne de sol poroélastique. Il constate que la prise en compte du milieu de second gradient de dilatation produit des écarts avec la réponse du



modèle analytique, qui s'estompent progressivement en augmentant l'incrément de temps de la modélisation. Il a également réalisé un calcul d'excavation souterraine en couplant ce modèle de régularisation au modèle de comportement de Drucker-Prager. Le modèle de second gradient de dilatation sera présenté plus en détails dans le chapitre §7.2, car il s'agit du modèle de régularisation choisi dans le cadre de cette thèse pour supprimer la dépendance pathologique au maillage des résultats numériques des problèmes aux limites étudiés avec le modèle élasto-plastique de Hujeux (Aubry et al. (1982), Hujeux (1985), cf §3).

Les milieux micropolaires, encore appelés milieux de Cosserat, s'appuient sur les travaux des frères Cosserat (Cosserat et Cosserat, 1909). La cinématique du milieu est enrichie par la prise en compte de degrés de liberté de rotation supposés indépendants des déplacements. Cette approche a été reprise par Mühlhaus et Vardoulakis (1987) puis de Borst et Sluys (1991). Ces milieux de Cosserat peuvent néanmoins être ramenés à un cas particulier des milieux micromorphiques, où les microdéformations pures,  $d_{ij}$ , s'annulent. Ehlers et Volk (1998) ont étendu cette approche à la théorie des milieux poreux et ont démontré son efficacité sur un cas de stabilité de talus et un essai biaxial drainé. Les milieux de Cosserat sont très bien adaptés pour représenter le comportement des matériaux granulaires constitués d'éléments pouvant tourner localement, indépendamment du mouvement macroscopique. Néanmoins, si le mode de déformation ne fait pas intervenir de rotation des éléments, ces milieux sont inefficaces pour régulariser le problème.

Un modèle intermédiaire avant la présentation des milieux micromorphiques a été proposé par Eringen (1990), initialement développé pour des matériaux composites ou milieux granulaires. Le degré de liberté supplémentaire par rapport aux milieux micropolaires est la partie hydrostatique des microdéformations pures  $\chi$ . Elle permet la prise en compte de la contraction et de la dilatation de la microstructure du milieu. Ces milieux ont été notamment utilisés pour modéliser les déformations de biomatériaux (Rosenberg et Cimrman, 2003).

Chambon et al. (1998) proposent, à partir de la théorie des milieux micromorphiques, de travailler dans le cadre des milieux de second gradient locaux, en assumant l'égalité entre les microdéformations et les macrodéformations,  $f_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ . A ce jour, aucune expérimentation n'a démontré la validité de cette simplification. En revanche, dans le cadre des milieux granulaires, Calvetti et al. (1997), cité par Chambon et al. (2001), ont montré l'équivalence entre les rotations macroscopiques et les rotations moyennes des grains (essais réalisés en 2D sur des billes). De ces observations, il est possible de construire un cas particulier des milieux de second gradient, à savoir les milieux de Cosserat du second gradient, en imposant  $r_{ij} = R_{ij}$ . Ces modèles permettent notamment de s'affranchir de la relation liant les déformations relatives,  $(f_{ij} - \partial u_i / \partial x_j)$ , aux contraintes microscopiques,  $\tau_{ij}$ . Par la suite, Collin et al. (2006) ont réalisé l'extension de ces modèles à la théorie des milieux poreux. Collin et al. (2009) appliquent un modèle de second gradient local élastique pour représenter correctement le comportement post-localisation d'un cylindre creux à bord épais et en dégagent des résultats analytiques utiles pour une comparaison des résultats entre différents codes de calcul. Sieffert et al. (2009) utilisent également les modèles de second gradient local pour étudier le problème aux limites d'une excavation souterraine. Ils montrent que l'utilisation des milieux enrichis permet de conserver l'indépendance des résultats aux maillages. En revanche, cette cinématique enrichie ne restreint pas les solutions numériques à une solution unique de façon analogue aux expériences réelles réalisées.

### 6.8.3 Retour sur les modèles de régularisation

L'enjeu de ce paragraphe consistait à s'assurer que le modèle de régularisation choisi dans le cadre de cette thèse était bien adapté aux contraintes posées par le sujet. Ces contraintes sont de types différents. La première est liée à un modèle de comportement élasto-plastique, adoucissant, à caractère non associé et constitué de plusieurs seuils plastiques. Le second type de contrainte est lié à une modélisation des milieux poreux saturés, nécessitant un couplage des équations de la mécanique et de l'hydraulique. Le dernier type de contrainte concerne un chargement extérieur dynamique appliqué aux structures considérées.

Le couplage multi-physique nous impose de considérer des modèles continus, puisque le comportement local du matériau dans la zone d'adoucissement a un rôle prépondérant sur les chemins d'écoulement préférentiels de l'eau. Néanmoins, tous les modèles continus présentés ne sont pas facilement adaptables à cette modélisation couplée. En effet, les modèles continus intégrant une dépendance en temps introduisent un temps caractéristique, sans considération physique a priori. L'utilisation de ces modèles nécessitera de relier cette grandeur aux équations de l'hydraulique.

L'objectif de la thèse consiste à choisir, parmi les différents modèles de régularisation disponibles dans le logiciel Code\_Aster, le modèle le plus adapté au couplage avec un modèle de comportement de sols. Notre choix s'est porté sur des modèles continus de régularisation adaptables en l'état à tous les modèles de comportement locaux.

Néanmoins, les modèles de second gradient non locaux en déformations auraient pu être intéressants sous leur formulation implicite (Godard (2005) ; R5.04.02, cf équation 6.37), même si leur mise en œuvre nécessite des développements propres à chaque modèle de comportement local. Des difficultés seraient alors apparues pour construire l'opérateur tangent local issu du modèle de comportement.

Il était également possible d'utiliser le modèle de régularisation de variables internes (Lorentz (1999) ; R5.04.01) à condition d'apporter les modifications nécessaires aux surfaces de charge locales du modèle. Pour le couplage au modèle de Hujieux, le choix de la variable interne aurait alors été la déformation volumique plastique cumulée, car c'est la variable de couplage de tous les seuils du modèle.

En utilisant directement le modèle de second gradient de dilatation (Fernandes (2009a) ; R5.04.03), sans développement supplémentaire, le même champ scalaire, à la partie élastique près, est alors régularisé. L'autre modèle continu disponible, ne nécessitant pas de développements supplémentaires, est le modèle de second gradient local (Chambon et al. (1998) ; R5.04.03), modèle cependant plus coûteux en temps de calcul. Ce modèle pourrait également être utilisé en cas d'échec avec le modèle de second gradient de dilatation.

Le choix du modèle de second gradient de dilatation limite la régularisation du problème aux phases de comportement local générant des déformations volumiques. Or, lorsque le seuil de plasticité parfaite est atteint, l'incrément de la déformation volumique générée devient nul, d'où la disparition des effets régularisants. La largeur de la bande de localisation se stabilise ce qui permet

d'envisager une poursuite des calculs par une modélisation de type approche discontinue. Cette évolution des bandes de cisaillement au cours des essais numériques est en accord avec les essais expérimentaux réalisés sur le sable d'Hostun (Desrues et Viggiani (2004)), puisque les observations indiquent que la densité du matériau tend vers une valeur limite impliquant l'arrêt de déformation volumique au sein de la bande de cisaillement pour de grandes valeurs de déformations déviatoires.

Le chapitre suivant présente la formulation complète du modèle de second gradient de dilatation et les choix d'intégration numérique sous Code\_Aster réalisés par Fernandes dans le cadre de sa thèse (Fernandes et al. (2008) ; Fernandes (2009a) ; R5.04.03).

## 7 Application de la théorie du second gradient de dilatation

7 Application de la théorie du second gradient de dilatation .....	127
7.1 Introduction.....	127
7.2 Formulation théorique du modèle de second gradient.....	128
7.3 Formulation numérique.....	133
7.4 Couplage avec le modèle de Hujeux pour des matériaux dilatants.....	134
7.4.1 Localisation des déformations dans une bande cisailée.....	135
7.4.1.1 Problèmes en vitesse pour les milieux du second gradient de dilatation.....	135
7.4.1.2 Résolution analytique.....	135
7.5 Étude numérique d'un essai biaxial drainé.....	139
7.5.1 Description du problème aux limites.....	140
7.5.2 Modèles constitutifs utilisés.....	141
7.5.2.1 Modèle de Hujeux de type Cam-Clay original (HCC).....	141
7.5.2.2 Modèle de Hujeux simplifié (HJS).....	142
7.5.2.3 Modèle de Hujeux complet.....	142
7.5.2.4 Paramètres matériau.....	142
7.5.3 Réponses locales des modèles au chemin biaxial drainé.....	143
7.5.3.1 Comportement des modèles.....	144
7.5.3.2 Détermination des domaines et cônes d'instabilités.....	145
7.5.4 Hypothèses de calcul.....	152
7.5.5 Comparaison des résultats numériques et analytiques.....	153
7.5.5.1 Résultats obtenus avec le modèle HCC.....	154
7.5.5.2 Extension des résultats aux autres modèles constitutifs.....	163
7.5.5.3 Retour sur la procédure mise en place.....	170
7.5.6 Indépendance des résultats aux maillages.....	170
7.5.7 Influence de la discrétisation du chargement sur les résultats.....	173
7.5.8 Évolution de la largeur des bandes de cisaillement au cours du chargement.....	175
7.5.9 Répartition des énergies internes .....	176
7.5.10 Bilan et perspectives suite à la modélisation des essais biaxiaux drainés.....	178
7.6 Étude de stabilité d'un déblai.....	180
7.6.1 Motivation.....	180
7.6.2 Présentation du problème aux limites et ses conditions initiales.....	180
7.6.3 Résultats obtenus sans la méthode de second gradient de dilatation..	182
7.6.4 Résultats obtenus avec la méthode de second gradient de dilatation..	185
7.6.5 Bilan et perspectives de l'étude de stabilité de pente.....	189

### 7.1 Introduction

L'idée directrice de cette thèse consiste à mettre à disposition des ingénieurs un outil de modélisation adapté au comportement cyclique des sols, capable de reproduire ou d'anticiper les modes de ruine relatifs à des ouvrages du génie civil.

Le modèle de comportement de Hujeux a été choisi pour réaliser cet objectif pour sa capacité à reproduire une large gamme de phénomènes identifiés caractérisant le comportement des sols granulaires sous chargements monotones et cycliques.

Les états de ruine répertoriés font état de deux grandes classes de phénomènes

apparus notamment dans le cadre d'essais de laboratoire. Le premier mode de rupture se manifeste par l'apparition d'une zone localisée à fortes déformations déviatoriques, nommée par la suite bande de localisation ou de cisaillement. Ce mode de rupture est le plus souvent observé pour des essais en conditions drainées sur des sables lâches ou denses (Desrues et Viggiani (2004)). Le second mode se caractérise quant à lui par une rupture diffuse sans apparition de bandes de localisation. Le phénomène de liquéfaction en est un exemple typique, observé notamment dans un essai non drainé sur sable lâche (Servant (2003) cité par Hamadi (2006)).

Les travaux portant sur le modèle de Hujeux ont notamment montré que ce modèle est capable de prédire ces modes de ruine (Vossoughi (2001), Hamadi (2006), Costa D'Aguiar (2008)). Néanmoins, comme précisé au §6.5, la bifurcation des solutions d'un problème homogène en bandes de localisation, caractérisée par la perte d'ellipticité des équations régissant le problème (dans le cas d'un chargement quasi-statique), se traduit, dans le régime de « post-localisation », par l'incapacité du modèle de Hujeux à caractériser la largeur de la bande de localisation. Ce point critique conduit à une dépendance pathologique des résultats numériques aux maillages utilisés. Les difficultés soulevées peuvent être levées en s'appuyant sur des solutions alternatives à l'approche classique des milieux continus, appelées généralement méthodes de régularisation (§6.8). Le concept des milieux de second gradient volumique (Fernandes (2008, 2009a)) est une des méthodes appartenant à ces solutions alternatives.

Le modèle de second gradient de dilatation, développé notamment par Fernandes (2009a), est présenté en détails dans ce chapitre. L'exposé portera sur la formulation théorique de ce modèle « limiteurs de localisation », sur les formulations numériques choisies pour implanter le modèle et enfin la validation numérique de cette méthode dans le cadre de lois de mécanique des sols, comme celle de Hujeux, sur un essai biaxial drainé et une étude de stabilité de pente sous chargement d'une fondation superficielle en tête de talus.

Le travail réalisé dans cette thèse a finalement permis d'entreprendre le couplage entre le modèle de Hujeux et le modèle de second gradient volumique. Le but de ce travail consistait alors à caractériser le couplage entre ces deux modèles, à en maîtriser les paramètres clés pour, à terme, entreprendre une diffusion de cet outil auprès de l'ingénierie.

## 7.2 Formulation théorique du modèle de second gradient

A partir du modèle des milieux micromorphiques (présenté §6.8.2.2.3), on peut restreindre la cinématique du milieu au champ de déplacement classique  $(u_i)$ , à la variation volumique microscopique notée  $\chi$  et à ses gradients pour définir les milieux à microstructure dilatants. Il est nécessaire d'associer aux variables cinématiques des variables statiques duales : les contraintes macroscopiques classiques  $(\sigma_{ij})$ , la contrainte microscopique de dilatation  $\kappa$  et les doubles contraintes vectorielles de dilatation  $(S_j)$ .  $\kappa$  est la variable duale de la déformation volumique relative  $(\epsilon_v - \chi)$  et  $(S_j)$  la variable duale du gradient de la dilatation microscopique  $\frac{\partial \chi}{\partial x_j}$ .

On admet que la cinématique locale du milieu continu micromorphique de dilatation

occupant le domaine  $\Omega$ , dans tout champ de déplacement virtuel  $u^*$  appartenant à l'espace vectoriel des champs admissibles  $\mathcal{V}_0$  (avec les régularités nécessaires, et nuls sur les bords  $\partial\Omega_u$  où le déplacement est imposé) et dans tout champ de dilatation virtuelle  $\chi^* \in \mathcal{D}_0$  (avec  $\chi^*$  libre sur  $\partial\Omega_u$ ), est représentée par :

- le champ de tenseur de déformation linéarisé d'ordre 2, symétrique, de composantes  $\epsilon_{ij}(u^*) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*)$  dans une base cartésienne  $(e_i)_{i=1,2,3}$ . Pour rappel,  $\text{div}(u^*) = u_{i,i}^* = \delta_{ij}\epsilon_{ij}(u^*)$  ;
- le champ de tenseur second gradient de dilatation, d'ordre 1, de composantes  $\eta_j = \chi_{,j}^*$ .

La notation d'Einstein est adoptée pour les indices des tenseurs : sommation sur les indices muets répétés et dérivation partielle. Les deux champs de tenseurs  $\epsilon$  et  $\eta$  sont indépendants d'après leur définition.

L'expression du travail virtuel de déformation pour les milieux micromorphiques de dilatation s'exprime comme suit :

$$\mathcal{W}_{def} = \int_{\Omega} \left( \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(u^*) + \kappa(\epsilon_v^* - \chi^*) + S_j\eta_j(\chi^*) \right) dv \quad (7.1)$$

On définit ici les grandeurs tensorielles duales  $\sigma$ ,  $\kappa$  et  $S$  des tenseurs de la cinématique.

On définit de même le travail virtuel des efforts extérieurs, avec  $\partial\Omega_f = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_u$  :

$$\mathcal{W}_{ext} = \int_{\Omega} f_i u_i^* dv + \int_{\partial\Omega_f} F_i u_i^* ds \quad (7.2)$$

avec  $f$  les forces de volume appliquées sur  $\Omega$  et  $F$  les forces de traction appliquées sur  $\partial\Omega_f$ , sans introduire de chargement sur le tenseur  $\chi$ .

L'application de l'axiome de l'équilibre du principe des puissances virtuelles au domaine  $\Omega$  conduit aux équations d'équilibre statique :

Trouver  $\sigma$ ,  $\kappa$  et  $S$  tels que :

$$\begin{aligned} -\mathcal{W}_{def} + \mathcal{W}_{ext} = 0 &\Leftrightarrow \forall (u^*, \chi^*) \in \mathcal{V}_0 \times \mathcal{D}_0, \\ \int_{\Omega} \left( \sigma_{ij}\epsilon_{ij}(u^*) + \kappa(\epsilon_v^* - \chi^*) + S_j\eta_j(\chi^*) \right) dv &= \int_{\Omega} f_i u_i^* dv + \int_{\partial\Omega_f} F_i u_i^* ds \end{aligned} \quad (7.3)$$

Il exprime l'équilibre statique du système, sous forme variationnelle et définit les champs de tenseurs  $\sigma$ ,  $\kappa$  et  $S$  admissibles. En intégrant par parties  $\mathcal{W}_{def}$ , on peut en tirer la formulation forte (équations d'EULER) de l'équilibre statique, en prenant d'abord des déplacements  $u^*$  nuls sur le bord  $\partial\Omega$ .

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} + \kappa_{,i} + f_i = 0 \\ \kappa + S_{j,j} = 0 \end{cases} \text{ dans } \Omega \quad (7.4)$$

avec  $\begin{cases} F_i &= (\sigma_{ij} + \kappa \delta_{ij}) n_j \\ S_j n_j &= 0 \end{cases}$  les conditions aux limites naturelles appliquées sur la frontière  $\partial\Omega$ .

Le passage des milieux micromorphiques de dilatation au modèle de second gradient de dilatation s'effectue en considérant la déformation volumique relative nulle. Autrement dit, il s'agit d'assumer l'égalité entre les déformations volumiques macroscopique  $\epsilon_v$  et microscopique  $\chi$  :

$$\begin{aligned} \chi(u) &= u_{i,i} \\ \eta_j(u) &= u_{i,ij} \end{aligned} \quad (7.5)$$

L'expression du principe des travaux virtuels s'écrit alors comme suit pour le modèle de second gradient de dilatation :

Trouver  $\sigma$  et  $S$  tels que :

$$\begin{aligned} -\mathcal{W}_{def} + \mathcal{W}_{ext} &= 0 \Leftrightarrow \\ \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij}(u^*) + S_j \eta_j(u^*)) dv &= \int_{\Omega} f_i u_i^* dv + \int_{\partial\Omega_f} F_i u_i^* ds \quad \forall u^* \in \mathcal{V}_0 \end{aligned} \quad (7.6)$$

En intégrant à nouveau par parties  $\mathcal{W}_{def}$ , on peut réécrire le principe comme suit :

Trouver  $\sigma$  et  $S$  tels que :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* dv + \int_{\Omega} S_{j,jk} u_k^* dv + \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j u_i^* ds - \int_{\partial\Omega} S_{j,j} n_k u_k^* ds + \int_{\partial\Omega} S_j n_j u_{k,k}^* ds \\ = \int_{\Omega} f_i u_i^* dv + \int_{\partial\Omega_f} F_i u_i^* ds \quad \forall u^* \in \mathcal{V}_0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

avec  $n_i$  le vecteur normal extérieur à la surface  $\partial\Omega$  du solide.

La formulation forte de l'équilibre statique est obtenue à partir de l'expression 7.7, en prenant d'abord des déplacements  $u^*$  nuls sur le bord  $\partial\Omega$  :

$$\sigma_{ij,j} - S_{j,jk} \delta_{ki} + f_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (7.8)$$

Il reste ensuite les termes de bord :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j u_i^* ds - \int_{\partial\Omega} S_{j,j} n_k \delta_{ki} u_i^* ds - \int_{\partial\Omega} (S_j n_j)_{,k} \delta_{ki} u_i^* ds + \int_{\partial\Omega} \text{div}(S_j n_j u^*) ds \\ = \int_{\partial\Omega_f} F_i u_i^* ds \quad \forall u^* \in \mathcal{V}_0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

La dernière intégrale du premier membre de cette équation variationnelle où l'on a noté  $(\vec{t}_\alpha, \vec{n})$  la base orthonormée naturelle locale de la surface du solide, s'écrit<sup>7</sup> :

7 Cf. par exemple: Bamberger (1981), tome 2 (annexe 3) et tome 3 (annexe 5). On obtient

$$\int_{\partial\Omega} \text{div}(S_j n_j u^*) ds = \int_{\partial\Omega} \partial_n(S_j n_j u_n^*) ds + \int_{\partial\Omega} \text{div}_s(S_j n_j u_\alpha^* \vec{t}_\alpha) ds \quad (7.10)$$

avec  $\text{div}_s$  la divergence covariante sur la surface  $\partial\Omega$ .

Comme  $\partial\Omega$  est une surface fermée, suffisamment régulière, on vérifie que cette seconde intégrale est nulle (par application du théorème divergence-flux). Les termes de bord s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} n_j u_i^* ds - \int_{\partial\Omega} S_{j,j} n_k \delta_{ki} u_i^* ds - \int_{\partial\Omega} (S_j n_j)_{,i} u_i^* ds + \int_{\partial\Omega} \partial_n(S_j n_j) u_n^* ds \\ + \int_{\partial\Omega} (S_j n_j) \partial_n u_n^* ds = \int_{\partial\Omega_f} F_i u_i^* ds \quad \forall u^* \in \mathcal{V}_0 \end{aligned} \quad (7.11)$$

La restriction du champ de déplacements virtuels  $u^*$  sur la surface  $\partial\Omega$  et la dérivée normale  $\partial_n u_n^*$  de sa composante normale sont des champs indépendants. On en tire par conséquent les équations locales, conditions aux limites naturelles du problème aux limites, ayant  $n^{\prime\alpha}=0$ , exprimées dans la base naturelle locale  $(\vec{t}_\alpha, \vec{n})$  du bord du solide :

- en terme de forces normales au bord (en prenant des déplacements virtuels normaux) :

$$\sigma_{nn} + S_{j,j} = F_n \quad \text{sur } \partial\Omega_f \quad (7.12)$$

- en terme de forces tangentielles au bord (en prenant des déplacements virtuels tangentiels) :

$$\sigma_{t_\alpha n} + S_{n,t_\alpha} = F_{t_\alpha} \quad \text{sur } \partial\Omega_f \quad (7.13)$$

- et selon la direction  $\partial_n u_n^*$  :

$$S_j n_j = S_n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (\text{sur tout le bord du solide}) \quad (7.14)$$

L'expression des conditions aux limites est modifiée pour ce modèle par rapport aux milieux micromorphiques de dilatation, puisque les variables  $\epsilon_v^*$  et  $\chi^*$  ne sont plus indépendantes.

Le développement du modèle de second gradient a été initié dans le but de régulariser les problèmes numériques liés à la perte d'ellipticité en quasi-statique ou d'hyperbolicité en dynamique des équations d'équilibre des problèmes abordés. Ces problèmes numériques apparaissent notamment avec la méthode des éléments finis, méthode utilisée pour traiter les problèmes aux limites présentés par la suite. L'hypothèse de construction du modèle de second gradient de dilatation, supposant

---

ainsi l'expression de la divergence d'un vecteur sur la surface  $\partial\Omega$  :  
 $\text{div } V = V^i_{,i} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha V^\beta$ , car les coefficients de Christoffel  $\Gamma_{\alpha n}^\alpha = \Gamma_{\alpha n}^n = \Gamma_{nn}^n = 0$ , pour la base locale  $(\vec{t}_\alpha, \vec{n})$ .



l'égalité des déformations volumiques, 7.5, impose la continuité et dérivabilité du champ de déplacement et de son gradient. Ceci implique d'utiliser pour les modèles numériques des éléments finis C1-continus.

Pour contourner cette difficulté, Matsushima et al. (2002) proposent d'ajouter des multiplicateurs de Lagrange,  $\Lambda$ , dans l'expression du principe des travaux virtuels, contraignant ainsi l'égalité 7.5. Le principe des travaux virtuels s'écrit alors comme suit :

Pour tout champ cinématiquement admissible  $(u_i^*, \chi^*, \Lambda^*)$ ,

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij}(u^*) + S_j \eta_j - \Lambda(\epsilon_v^* - \chi^*) + \Lambda^*(\epsilon_v - \chi)) dv = \int_{\partial\Omega} (F_i u_i^*) ds + \int_{\Omega} (f_i u_i^*) dv \quad (7.15)$$

Tous les champs cinématiques introduits sont au plus C0-continus. Les termes portant sur les multiplicateurs de Lagrange sont de signes opposés dans 7.15. La raison principale est liée à la conservation d'une matrice tangente de rigidité définie positive pour la résolution du système d'équations non linéaires via l'algorithme de Newton. En comparant les équations 7.3 et 7.15, les multiplicateurs de Lagrange peuvent être assimilés à des contraintes microscopiques de dilatation. L'équation 7.15 sera nommée à présent formulation mixte du modèle de second gradient de dilatation.

Le modèle de second gradient de dilatation doit être utilisé en prenant en compte deux lois de comportement : une pour la partie premier gradient et la seconde pour la relation entre le second gradient et les doubles contraintes. Toute loi de comportement établie dans le cadre de la mécanique des milieux continus classique peut être utilisée pour relier les déformations macroscopiques aux contraintes macroscopiques. La loi portant sur le second gradient n'est pas contrainte à une relation particulière, mais depuis les travaux de Mindlin (1965) sur l'élasticité linéaire, les auteurs utilisent cette loi de comportement pour le second gradient.

D'après les travaux de Mindlin (1965), Fernandes (2009a) établit la loi élastique linéaire suivante pour le modèle de second gradient de dilatation :

$$S_j = b_s \delta_{ij} \epsilon_{v,i} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_s & 0 & 0 \\ 0 & b_s & 0 \\ 0 & 0 & b_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon_v}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \epsilon_v}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \epsilon_v}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \text{ avec } b_s \in \mathbb{R}^+ \quad (7.16)$$

La restriction des effets microstructuraux à sa partie volumique a pour conséquence de limiter les effets de régularisation aux seuls modèles de comportement présentant une variation volumique durant la phase plastique. La majorité des modèles de comportement appliqués pour les sols génère des variations volumiques avant d'atteindre l'état critique. La cinématique retenue pour le modèle de second gradient de dilatation apparaît judicieuse pour deux raisons : le minimum de degrés de liberté supplémentaires à traiter et la capacité de régulariser un large domaine de la phase plastique des matériaux que l'on souhaite étudier.

La formulation des équations de la dynamique linéaire d'un milieu continu avec second gradient de dilatation sont présentées au §9.10. Dans cette section, les modes de vibrations en élasticité linéaire sont explicités. Par la suite, nous appliquons cette théorie à la caractérisation des mouvements propres d'une couche de sol élastique, puis une couche de sol poro-élastique. Les conclusions établies sont indiquées ci-dessous :

- Pour la colonne de sol élastique, la prise en compte des termes de second gradient de dilatation modifie faiblement la propagation des ondes dans le milieu et conduit à des ondes dispersives (équivalent à la poutre de Timoshenko), alors qu'elles sont propagatives et non-dispersives en élasticité simple. Néanmoins si le module de rigidité  $b_s$  est faible, le terme de second gradient de dilatation ne modifie pas fondamentalement le champ d'onde dans le milieu.
- Pour l'application à la colonne de sol poro-élastique, dans le cas d'un milieu non régularisé, il apparaît déjà une dispersion des ondes, conduisant même pour des milieux imperméables à une singularité du système d'équations régissant le problème aux limites traité. Pour les milieux très perméables, on retrouve les solutions établies pour le milieu élastique, à savoir des ondes propagatives et non dispersives.

### 7.3 Formulation numérique

L'objectif de ce paragraphe est de présenter les conclusions établies par Fernandes (2009a) pour l'implantation numérique du modèle de second gradient de dilatation dans Code\_Aster. Il précise tout d'abord que les lignes directrices de son travail consistaient à rechercher, pour la formulation mixte du modèle, les solutions les moins coûteuses en temps de calcul et les plus précises possibles, notamment par le respect de la contrainte mathématique  $\epsilon_v = \chi$ . La qualité des résultats dépend fortement du choix des fonctions d'interpolation des inconnues nodales, à savoir le champ de déplacement  $(u_i)$ , la déformation volumique microscopique  $\chi$  et les multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda$ . Ces fonctions d'interpolation coïncident avec les fonctions de forme établies pour les éléments finis. Les conclusions établies par Fernandes (2009a) sont les suivantes :

- Il est préférable de considérer des éléments finis triangulaires plutôt que des quadrangulaires. En effet, un point majeur du problème consiste à assurer au mieux la cohérence des espaces d'approximation de la déformation volumique microscopique et macroscopique, tout en se restreignant à un champ de déplacement C0-continu. Les fonctions de base établies pour les éléments triangulaires permettent de respecter plus facilement la cohérence des espaces d'approximation, à savoir P2 pour les déplacements et P1 pour la déformation volumique microscopique. Cette cohérence est plus délicate à assurer avec des éléments quadrangulaires, de type Serendip (à 8 nœuds).
- Il n'y a plus d'équivalence dans les formulations mixtes discrètes entre le second gradient de dilatation et le modèle de second gradient de dilatation. Le modèle de second gradient de dilatation et le modèle de second gradient simplifié ne convergent pas strictement vers les mêmes solutions.
- L'espace optimal des fonctions de forme pour les multiplicateurs de

Lagrange, compte-tenu des restrictions décrites en introduction, est un espace P0, soit un champ constant par élément. Fernandes a notamment testé des fonctions de forme P2, P1 et P0. Le meilleur compromis entre qualité des résultats et coût de calcul a désigné les fonctions de forme P0.

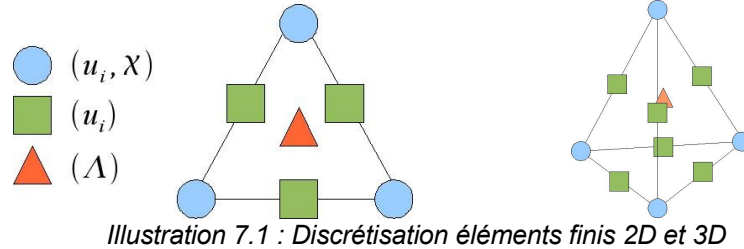
- Il préconise l'ajout d'un terme de pénalisation,  $r$ , dans la formulation énergétique du modèle de second gradient de dilatation. Ce terme de pénalisation permet d'améliorer les performances numériques des calculs. Finalement, pour réduire la sensibilité des résultats à la valeur du terme de pénalisation, il définit une formulation mixte combinée au terme de pénalisation. Cette formulation prend alors la forme suivante :

Trouver  $\sigma$  et  $S$  tels que :

$$\int_{\Omega} \left( \sigma_{ij} \epsilon_{ij}(u^*) + S_j \eta_j - \Lambda (\epsilon_v^* - \chi^*) + \Lambda^* (\epsilon_v - \chi) + r (\epsilon_v - \chi) (\epsilon_v^* - \chi^*) \right) dv = \int_{\partial\Omega} (F_i u_i^*) ds + \int_{\Omega} (f_i u_i^*) dv \quad \forall (u^*, \chi^*, \lambda^*) \in \mathcal{V}_0 \quad (7.17)$$

Pour l'ensemble des études menées avec le modèle de second gradient de dilatation, la valeur du paramètre de pénalisation est fixée à  $r=10^{14}$ , valeur proposée par Fernandes (2009a).

Les éléments finis disponibles dans Code\_Aster sont présentés sur les figures suivantes :



L'application dans Code\_Aster de cette modélisation nécessite la superposition de deux modélisations, la première en lien avec le calcul des états de contraintes de la structure (partie standard) et la seconde en lien avec le calcul du tenseur des doubles forces. Les deux modélisations communiquent ensuite dans l'architecture du code lors de l'assemblage des termes élémentaires liés à la raideur de la structure.

## 7.4 Couplage avec le modèle de Hujeux pour des matériaux dilatants

Dans une première section, un exemple analytique, traité préalablement par Chambon et al. (2001) dans le cadre des milieux à second gradient, nous a permis de caractériser les paramètres clés de ce couplage. La section suivante s'attache à démontrer pour un essai biaxial monotone drainé sur sable d'Hostun la capacité des paramètres identifiés à contrôler la largeur des bandes de localisation apparaissant au cours du chargement.

La section finale s'intéresse suivant la même approche à un problème de stabilité

de pente soumise au chargement d'une fondation superficielle en tête de talus.

### 7.4.1 Localisation des déformations dans une bande cisailée

La rupture dans les géomatériaux se caractérise souvent par la formation de zones à déformations localisées, relatant un passage de zones de déformations homogènes vers des modes de déformations non homogènes. L'apparition de ce phénomène peut être vu sur le plan théorique comme le changement spontané du mode de déformation, assimilé à une bifurcation d'une branche de l'équilibre, c'est à dire l'intersection de deux branches de solutions fonctions des paramètres de contrôle. Dans le cadre des milieux continus, il est possible de dégager sous des conditions restreintes des critères de bifurcation permettant d'identifier le paramètre de contrôle provoquant l'apparition de la bande de cisaillement, ainsi que les orientations potentielles de celle-ci. En revanche, pour les milieux continus classiques, le régime de « post-localisation », notamment la largeur de la bande de cisaillement, ne peut pas être caractérisée. Les résultats expérimentaux montrent néanmoins que cette largeur est un élément intrinsèque aux propriétés du matériau, lié à sa microstructure (forme et taille des grains, Desrues et Viggiani (2004)) et son état initial (indice des vides et état de contraintes). L'utilisation de la théorie du second gradient local de dilatation permet d'enrichir la cinématique du milieu traduisant ainsi les effets de la microstructure à l'échelle globale. Dans cette section, nous allons extraire d'un problème analytique bidimensionnel les éléments permettant de caractériser la largeur de la bande de cisaillement durant le régime de « post-localisation ».

#### 7.4.1.1 Problèmes en vitesse pour les milieux du second gradient de dilatation

La formulation du problème en vitesse s'écrit alors sous la forme suivante, en considérant les forces de volume constantes :

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}(u^*) + \dot{S}_j \eta_j(u^*) dv = \int_{\partial\Omega} \dot{F}_i u_i^* ds \quad \forall u^* \in \mathcal{V}_0 \quad (7.18)$$

$\dot{\sigma}_{ij}$ ,  $\dot{S}_j$  et  $\dot{F}_i$  sont les dérivées temporelles des termes introduits dans l'équation 7.6.

#### 7.4.1.2 Résolution analytique

Le problème analytique bidimensionnel abordé ci-dessous a été résolu par Chambon et al. (2001) pour un modèle de second gradient complet avec le modèle local élastoplastique de Mohr-Coulomb décrit par Vardoulakis et Sulem (1995, chapitre 6). L'exemple consiste à appliquer le modèle de second gradient de dilatation dans une couche cisailée et à déterminer les solutions du problème en vitesse.

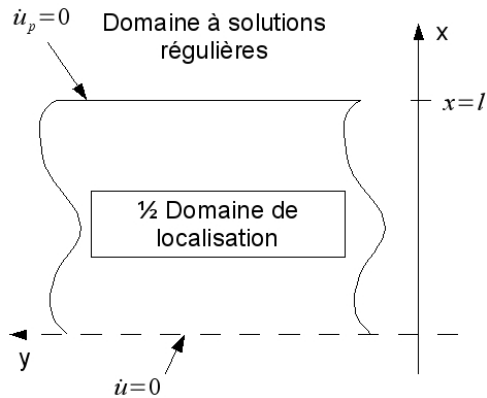


Illustration 7.2 : Domaine étudié

On considère une couche définie dans le plan  $(x, y)$  avec  $z$  l'axe perpendiculaire au plan. Chambon et al. (2001) considèrent une couche infinie comprise entre deux plans définis par  $x=0$  et  $x=l$  (illustration 7.2). Les champs de déplacement sont notés  $u$  dans la direction  $x$  et  $v$  dans la direction  $y$ .  $\dot{u}$  et  $\dot{v}$  sont supposés ne dépendre que de  $x$  et leurs dérivées par rapport à  $x$  seront notées  $\dot{u}'$  et  $\dot{v}'$ .

L'état initial du matériau est défini homogène. Les évolutions des conditions aux limites appliquées au domaine sont les suivantes :

- pour  $x=0$ ,  $\dot{u}=0$ ,  $\dot{v}=0$
- pour  $x=l$ ,  $\dot{F}_i$  sont connues.

Les forces de volume sont supposées constantes.

Les conditions de symétrie appliquées à la frontière  $x=0$  indiquent que le domaine étudié a une largeur totale de  $2l$ .

Ce problème peut être vu comme l'analyse du comportement d'une bande de localisation, où l'orientation de la bande est supposée et l'état de contraintes est laissé libre de toute restriction. La frontière du domaine en  $x=l$  définit la zone de transition entre la zone de localisation (domaine étudié) et le domaine d'un solide quelconque où les solutions sont supposées régulières et stables.

Le gradient du champ de déplacement dans le domaine prend la forme suivante :

$$\dot{u}_{i,j} = \begin{bmatrix} \dot{u}' & 0 \\ \dot{v}' & 0 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

Le champ de déformation macroscopique s'écrit explicitement :

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = \begin{bmatrix} \dot{u}' & \frac{1}{2}\dot{v}' \\ \frac{1}{2}\dot{v}' & 0 \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

Le seul terme non nul du gradient des déformations volumiques est :

$$\frac{\partial \dot{\epsilon}_v}{\partial x_1} = \dot{u}'' \quad (7.21)$$

L'application du principe des travaux virtuels au champ de déplacement imposé après 2 intégrations par parties donne les équations d'équilibre suivantes pour le problème en vitesse :

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 \dot{S}_j}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{\sigma}_{11} - \dot{S}_1 = 0 \\ \dot{\sigma}_{12} = 0 \end{cases} \quad (7.22)$$

Les conditions aux limites fournissent en  $x=l$  :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{11} - \dot{S}_1 = \dot{F}_1 \\ \dot{\sigma}_{12} = \dot{F}_2 \\ b_s \dot{u}''' = 0 \end{cases} \quad (7.23)$$

Après intégration spatiale des équations d'équilibre en tenant compte des conditions aux limites pour un problème homogène, les solutions du problème respectent les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{11} - \dot{S}_1 = \dot{F}_1 \\ \dot{\sigma}_{12} = \dot{F}_2 \end{cases} \quad (7.24)$$

En utilisant les lois constitutives des premier et second gradients, les équations deviennent :

$$\begin{cases} H_{1111} \dot{u}' + H_{1112} \dot{v}' - b_s \dot{u}''' = \dot{F}_1 \\ H_{1211} \dot{u}' + H_{1212} \dot{v}' = \dot{F}_2 \end{cases} \quad (7.25)$$

Le système d'équations différentielles couplées peut se réduire à une équation, la seconde équation exprimant une relation linéaire entre les premiers gradients des déplacements verticaux et horizontaux dans la bande.

$$\begin{cases} H_{1111} \dot{u}' + H_{1112} \frac{\dot{F}_2 - H_{1211} \dot{u}'}{H_{1212}} - b_s \dot{u}''' = \dot{F}_1 \\ \frac{\dot{F}_2 - H_{1211} \dot{u}'}{H_{1212}} = \dot{v}' \end{cases} \quad (7.26)$$

Les solutions de ce système d'équations différentielles linéaires d'ordre 2 s'expriment comme la somme d'une solution particulière répondant aux conditions aux limites imposées et d'une solution partielle établie à partir des racines du polynôme caractéristique de ce système :  $\dot{u}' = \dot{u}_0' + \dot{u}_p'$

On suppose pour  $\dot{u}_p'$  une solution du type  $\dot{u}_p' = e^{\eta x}$  qui permet d'établir l'équation caractéristique suivante :

$$H_{1111} - H_{1112} \frac{H_{1211}}{H_{1212}} - b_s \eta^2 = 0 \quad (7.27)$$

On peut alors donner l'expression de la solution partielle en fonction des paramètres matériau du premier et second gradient :

$$\text{soit } \eta^2 = \frac{H_{1111}H_{1212} - H_{1112}H_{1211}}{b_s H_{1212}} \quad (7.28)$$

La loi constitutive de premier gradient étant élasto-plastique, les solutions seront différentes selon l'état de la région considérée. Dans une région à comportement élastique, la loi constitutive s'écrit  $\dot{\sigma} = A \dot{\epsilon}$  et dans une région à comportement plastique  $\dot{\sigma} = H^{ep} \dot{\epsilon}$ .

Finalement les solutions du problème prennent les formes suivantes en fonction du signe de

$$\eta^2 = \Delta = \frac{H_{1111}H_{1212} - H_{1112}H_{1211}}{b_s H_{1212}} \quad (7.29)$$

- Si  $\Delta > 0$ , alors

$$\dot{u}' = \dot{u}'_0 + (C_{11} \exp(\eta_1 x) + C_{12} \exp(\eta_2 x)) \quad (7.30)$$

avec  $\eta_i = \pm \sqrt{\Delta}$  et  $\dot{u}'_0$  obtenue à partir de l'équation de la solution particulière :

$$\dot{u}'_0 = \frac{H_{1212} \dot{F}_1 - H_{1112} \dot{F}_2}{H_{1111}H_{1212} - H_{1112}H_{1211}} \quad \text{et} \quad \dot{v}'_0 = \frac{H_{1111} \dot{F}_2 - H_{1211} \dot{F}_1}{H_{1111}H_{1212} - H_{1112}H_{1211}} \quad (7.31)$$

De plus, les solutions partielles  $\dot{u}'_p$  vérifient les équations suivantes :

$$\frac{H_{1111}H_{1212} - H_{1112}H_{1211}}{b_s H_{1212}} \dot{u}'_p - \dot{u}'''_p = 0 \quad (7.32)$$

A partir des conditions de symétrie du domaine étudié et  $\dot{u}'_p(l) = 0$ , on en déduit que les coefficients  $C_{11}$  et  $C_{12}$  sont nuls.

- Si  $\Delta < 0$ , alors

$$\dot{u}' = \dot{u}'_0 + (C_{21} \cos(\omega x) + C_{22} \sin(\omega x)) \quad (7.33)$$

avec  $\omega = \sqrt{\frac{H_{1211}H_{1112} - H_{1212}H_{1111}}{b_s H_{1212}}}$ . De même que pour les solutions

précédemment établies pour les zones où  $\Delta > 0$ , la solution partielle  $\dot{u}'_p$  vérifie l'équation 7.32.

L'expression de la solution dans la zone où  $\Delta < 0$  fait apparaître des fonctions trigonométriques. Il est donc clair qu'une zone de localisation peut apparaître dans la structure. On peut alors admettre que la structure privilégie une longueur interne de  $l_c = 2\pi/\omega$ , s'exprimant selon le premier mode de plus basse énergie.

On constate aussi que la dépendance de la longueur interne  $l_c$  est en  $\sqrt{b_s}$ . Il est intéressant de remarquer également que la condition d'apparition des solutions de bifurcations est contrôlée uniquement par les termes du modèle de premier gradient. Autrement dit, la prise en compte d'une cinématique enrichie restreinte aux milieux de second gradient ne modifie pas la valeur du paramètre de contrôle provoquant l'apparition d'une solution bifurquée en bandes de cisaillement.

La méthode pour définir l'expression définitive de la solution du champ de déplacement est présentée en détail dans l'article de Chambon et al. (2001). Cette étape n'est pas reproduite dans le mémoire, puisque les critères d'apparition de solutions bifurquées sont identifiés à partir de l'expression du gradient des vitesses du champ de déplacement.

Le paragraphe suivant est destiné à montrer l'intérêt du problème analytique présenté ci-dessus pour appréhender les problèmes de localisation des déformations à l'échelle d'une structure. Les solutions obtenues en relation avec la largeur de bande permettent, pour un chemin de chargement donné, d'établir la relation analytique reliant la largeur de bande aux propriétés locales du matériau définies pour la partie premier gradient des déformations et pour la partie relative au second gradient des déformations.

## 7.5 Étude numérique d'un essai biaxial drainé

Les expériences réalisées en laboratoire sur des essais biaxiaux drainés (travaux de thèse de Desrues (1984), Hammad (1991) et Mokni (1992) cités par Desrues et Viggiani (2004)) pour des matériaux contractants et dilatants ont mis en exergue l'apparition de solutions bifurquées caractérisées par des bandes de localisation au sein des échantillons initialement homogènes peu avant ou au pic de contraintes déviatoires (mais jamais après le pic). Les procédés expérimentaux permettant de caractériser l'évolution des bandes de cisaillement sont l'utilisation des rayons-gamma, la stéréophotogrammétrie et la tomographie calculée par rayons X (Desrues et al. (1991) et Desrues et al. (1996), cités par Desrues et Viggiani (2004)). Desrues et Viggiani (2004) insistent néanmoins sur le fait que l'orientation et la largeur des bandes de cisaillement est un phénomène évolutif au cours des essais. Ils indiquent également que l'orientation des bandes de cisaillement changent en fonction de l'état initial du matériau (indice des vides) et la pression de confinement appliquée.

A l'origine, l'apparition des bandes de cisaillement a été interprétée comme due à des hétérogénéités du matériau ou encore des conditions aux limites. Des améliorations ont alors été apportées aux préparatifs des échantillons et des dispositifs, notamment l'élancement de l'échantillon, la lubrification des surfaces de l'échantillon chargées axialement. Malgré ces efforts, le mode de rupture localisé s'est maintenu lors des essais drainés réalisés par la suite.

Desrues (1984) et Vardoulakis (1980) ont alors mis en évidence le caractère



intrinsèque des matériaux granulaires à produire ces modes de rupture. Ils ont ainsi mis en évidence l'aspect non aléatoire d'apparition du phénomène.

Hamadi (2006) a présenté, dans le cadre de ses travaux de thèse, la capacité du modèle de Hujieux à bien reproduire le comportement des sols pour des essais homogènes et à identifier des cônes dans l'espace des directions de taux de déformations provoquant des instabilités à l'intérieur strict du critère de Mohr-Coulomb.

Ce paragraphe s'attache à reproduire ces phénomènes de localisation par un modèle élément fini, avec un modèle de comportement adapté, en conditions quasi-statiques et à déterminer la capacité du problème analytique (§7.4.1) à préciser la largeur des bandes de localisation lors de leur apparition. L'aspect relatif à la dépendance pathologique des résultats au maillage sera également traité, pour différents modèles constitutifs (obtenus à partir du modèle de Hujieux) et paramètres matériaux. Les résultats seront également analysés par rapport à la discrétisation du chargement imposé. En complément de ces paramètres de contrôle de la modélisation, l'évolution de la largeur de la bande de cisaillement au cours du chargement sera également analysée pour finalement traiter la question reliée à l'énergie interne produite par la prise en compte d'une cinématique enrichie telle qu'introduite dans les milieux à second gradient de dilatation.

Les simulations réalisées seront analysées suivant différentes grandeurs de résultats :

- L'indicateur d'état plastique instantané des mécanismes monotones du modèle de Hujieux défini aux points de Gauss, qui vaut 1 en charge plastique, 0 en charge élastique ou -1 en décharge.
- La courbe du comportement global de la structure en fonction des déplacements imposés en tête de l'échantillon.
- L'amplitude des déformations volumiques plastiques cumulées, variable de couplage entre les mécanismes du modèle de Hujieux, obtenue aux points de Gauss. Elle sera visualisée sous forme d'isovaleurs sur l'ensemble de la structure ou encore présentée par l'intermédiaire d'une coupe verticale passant au centre de l'échantillon.

### 7.5.1 Description du problème aux limites

L'exemple considéré simule un essai biaxial drainé sur sable d'Hostun. L'échantillon considéré est défini géométriquement comme plan, caractérisé par une hauteur de 20 cm et une largeur de 10 cm. Les déformations hors-plan sont nulles durant toute la modélisation. Un chargement latéral constant en pression est appliqué sur les bords de la structure. Un écrasement axial monotone est imposé en tête de l'échantillon par déplacement. L'illustration 7.3 présente la géométrie de l'échantillon ainsi que les sollicitations extérieures appliquées.

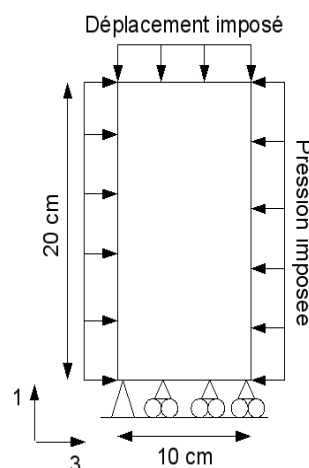


Illustration 7.3 : Essai biaxial : géométrie et sollicitations

Les déplacements verticaux de la base de

l'échantillon sont bloqués, tandis que les déplacements horizontaux sont bloqués uniquement au coin gauche inférieur de la structure. Le déplacement axial imposé en tête de l'échantillon varie linéairement au cours du chargement.

Les conditions naturelles portant sur le tenseur de double force imposent  $S_j \cdot n_j = 0$  sur les bords de la structure.

## 7.5.2 Modèles constitutifs utilisés

La complexité du modèle de Hujeux a été appréhendée en plusieurs étapes, en construisant des modèles à difficulté croissante. En choisissant judicieusement les paramètres matériau du modèle de Hujeux, il est possible de travailler avec des modèles de comportement à complexité variable.

Deux modèles constitutifs ont été identifiés pour permettre une appréhension croissante des difficultés liées au modèle complet de Hujeux. Les complexités du modèle complet sont relatives à l'approche multi-mécanismes, mobilisation progressive de l'angle de frottement pour les mécanismes déviatoires, prise en compte d'un écrouissage cinématique pour les chargements cycliques.

En négligeant les effets du mécanisme isotrope, les réponses du modèle sont uniquement modifiées quantitativement pour un essai biaxial drainé monotone.

L'écrouissage isotrope appliqué aux mécanismes déviatoires, portant sur la mobilisation progressive de l'angle de frottement, permet de définir un domaine élastique relativement faible et conduit également à une évolution progressive des propriétés du tenseur de rigidité constitutif. La prise en compte de cet écrouissage a un effet non négligeable sur le temps de calcul au niveau de l'intégration locale.

Le chargement appliqué est exclusivement monotone et la branche fondamentale de solution est homogène sur le domaine.

### 7.5.2.1 Modèle de Hujeux de type Cam-Clay original (HCC)

L'obtention d'un modèle proche du modèle de Cam-Clay original s'effectue en modifiant plusieurs paramètres du modèle de Hujeux.

Pour supprimer l'écrouissage cinématique du modèle de Hujeux, les rayons élastiques déviatoires,  $r_{d,cyc}^{ela}$ , utilisés pour les mécanismes cycliques doivent être portés directement à la valeur de l'unité. De cette façon, les mécanismes déviatoires cycliques peuvent être créés, mais ne seront jamais sollicités au cours du chargement.

Pour négliger l'effet des mécanismes isotropes monotone et cyclique, le paramètre  $d$  définissant la distance entre la droite de consolidation isotrope et la droite d'état critique doit être amplifié de telle sorte que les états de contrainte atteints durant l'essai restent toujours dans le domaine élastique du mécanisme isotrope monotone.

L'écrouissage isotrope appliqué à la mobilisation progressive de l'angle de frottement peut être annihilé en imposant une valeur du rayon élastique déviatoire monotone,  $r_{d,mon}^{ela}$ , égale à l'unité.

Les trois modifications imposées permettent finalement d'obtenir un modèle constitutif local proche du modèle de Cam-Clay pour les surfaces de charge déviatoires.

L'expression des surfaces de charge déviatoires se réduit donc à l'écriture suivante (voir équation 3.11) :

$$f_k^{dev}(\sigma, \epsilon_v^p) = q_k + M p_k \left( 1 - b \ln \left( \frac{p_k}{P_c(\epsilon_v^p)} \right) \right) \quad (7.34)$$

La règle d'écoulement plastique prend la forme suivante (voir équation 3.15) :

$$\Psi_k^{dev} = \frac{S_k}{2q_k} - \frac{\alpha}{2} \left( \sin \psi + \frac{q_k}{p_k} \right) I_k \quad (7.35)$$

La règle d'écrouissage isotrope portée par la pression critique ne change quant à elle pas de forme (cf équation 3.13).

En imposant  $b = 1$ , on retrouve un modèle élasto-plastique associé.

#### 7.5.2.2 Modèle de Hujeux simplifié (HJS)

De même que pour le modèle constitutif présenté ci-dessus, l'écrouissage cinématique est inexistant et les mécanismes isotropes monotones ne peuvent pas être activés, en imposant une expression de la surface de charge inaccessible pour tous les états de contrainte envisageables.

Le modèle est construit selon une règle d'écoulement non associée, telle que présentée au §3.3. Le modèle ainsi défini est quasi-identique au modèle de Hujeux complet pour les chargements d'un essai biaxial drainé.

Les surfaces de charge déviatoires prennent donc l'expression suivante :

$$f_k^{dev}(\sigma, \epsilon_v^p, r_k) = q_k + M p_k \left( 1 - b \ln \left( \frac{p_k}{P_c(\epsilon_v^p)} \right) \right) r_k \quad (7.36)$$

La règle d'écoulement plastique définie prend la forme suivante :

$$\Psi_k^{dev} = \frac{S_k}{2q_k} - \frac{\alpha}{2} \zeta(r_k) \left( \sin \psi + \frac{q_k}{p_k} \right) I_k \quad (7.37)$$

La règle d'écrouissage suivie par les rayons déviatoires monotones est donnée par la relation 3.17.

#### 7.5.2.3 Modèle de Hujeux complet

Le modèle de Hujeux a été présenté dans son ensemble au §3.

#### 7.5.2.4 Paramètres matériau

Le tableau 7.1 présente l'ensemble des paramètres matériaux établis pour les différents modèles suivant le jeu de paramètres initial proposé par Lopez-Caballero et al. (2003b).

PARAMETRES	HCC	HJS	HUJEUX DR88%
$P_0 (MPa)$	-0,5	-0,5	-0,5
<b>ELASTICITE</b>			
$K (MPa)$	400	400	400
$G (MPa)$	184	184	184
$n^e$	0	0	0
$P_{ref} (MPa)$	-1	-1	-1
<b>ETAT CRITIQUE + PLASTICITE PARFAITE</b>			
$\phi (degrés)$	33	33	33
$\beta$	17	17	17
$d$	2,50E+005	2,50E+005	2,5
$b$	1	0,2	0,2
$P_{c0} (MPa)$	-8	-8	-8
<b>LOI D'ECOULEMENT + ECROUISSAGE ISOTROPE</b>			
$\psi (degrés)$	33	33	33
$a_{mon}$	0,018	0,018	0,018
$a_{cyc}$	0,0002	0,0002	0,0002
$c_{mon}$	0,0001	0,0001	0,0001
$c_{cyc}$	0,00005	0,00005	0,00005
$x^m$	1	1	1
<b>SEUIL DES DOMAINES</b>			
$r_{d,mon}^{ela}$	1,000	0,005	0,005
$r_{d,cyc}^{ela}$	1,000	1,000	1,000
$r_{hys}$	0,25	0,25	0,25
$r_{mob}$	0,9	0,9	0,9
$r_{iso}^{ela}$	1,000	1,000	0,0001
$\alpha$	1	1	1

**Tableau 7.1 : Paramètres matériau pour les modèles constitutifs définis au §7.5.2**

### 7.5.3 Réponses locales des modèles au chemin biaxial drainé

Cette section a pour but de présenter dans un premier temps les réponses des différents modèles constitutifs construits au §7.5.2 pour un chemin biaxial drainé sur un point matériel.

Dans un second temps, on s'intéresse, pour les différents modèles construits, à l'approche mise en place par Imposimato et Nova (2001) relative au domaine de bifurcation matérielle au sens de Hill.

### 7.5.3.1 Comportement des modèles

Les résultats obtenus, pour un chemin biaxial drainé, à trois taux de confinement donnés, pour les trois modèles constitutifs, sont présentés sur les illustrations 7.4, 7.5 et 7.6. Les paramètres matériau utilisés conduisent à décrire le comportement d'un sol dense. Les résultats sont présentés dans les quatre plans représentatifs du comportement des sols,  $(p, q)$ ,  $(\epsilon_1, \eta)$ ,  $(p, \epsilon_v)$  et  $(\epsilon_1, \epsilon_v)$ , avec

$$p = \frac{\text{tr}(\sigma)}{3}, \quad q = \sigma_1 - \sigma_3, \quad \eta = q/p \quad \text{et} \quad \epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_3.$$

Les modèles type Cam-Clay (HCC) et Hujieux font apparaître un pic de contraintes avant un radoucissement pour ces taux de confinement. Ces trois modèles prédisent également un comportement dilatant du matériau sous ce chemin de chargement pour les confinements choisis. Les valeurs du pic de contraintes sont différentes entre le modèle de Hujieux complet et sa version simplifiée HCC, car le paramètre  $b$  du modèle a été modifié entre les deux modèles. Le choix du paramètre  $b=1$  avec le modèle HCC permet de travailler initialement avec un modèle de comportement à écoulement plastique associé.

Les résultats obtenus avec le modèle de Hujieux sans mécanisme isotrope (HJS) et le modèle complet sont quasi-identiques, que ce soit en termes de contraintes ou de déformations volumiques. Les différences entre ces deux modèles sur ce chemin de chargement sont mineures.

Les légendes présentées sur les illustrations 7.4, 7.5 et 7.6 intègrent également la droite d'état critique notée CSL (« Critical State Line »).

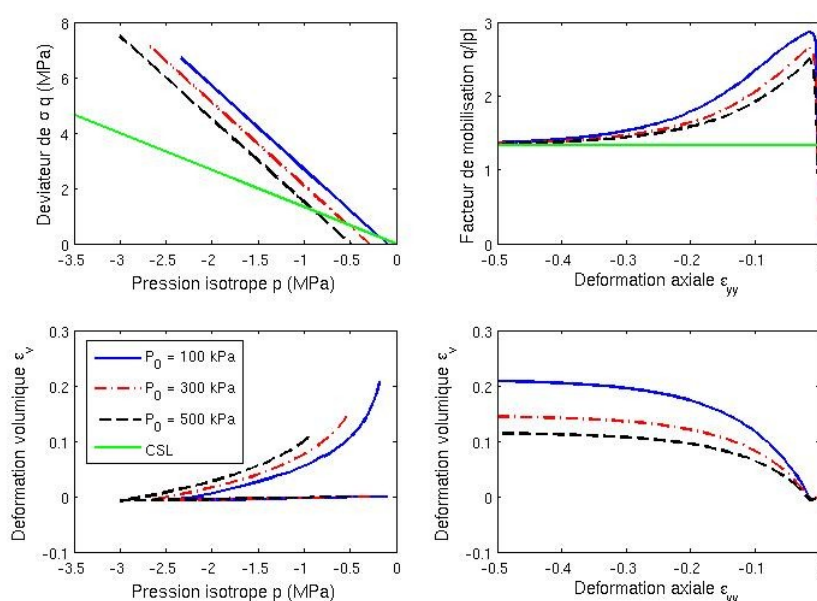
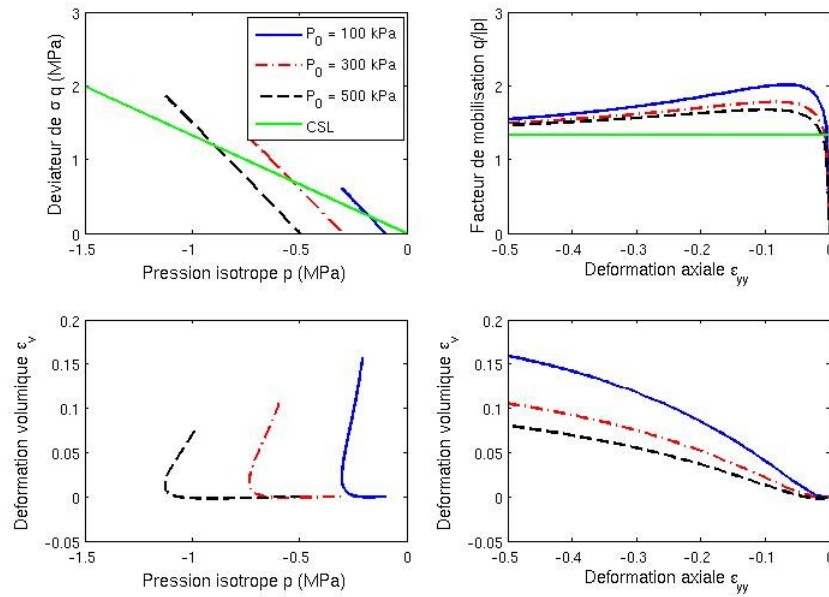
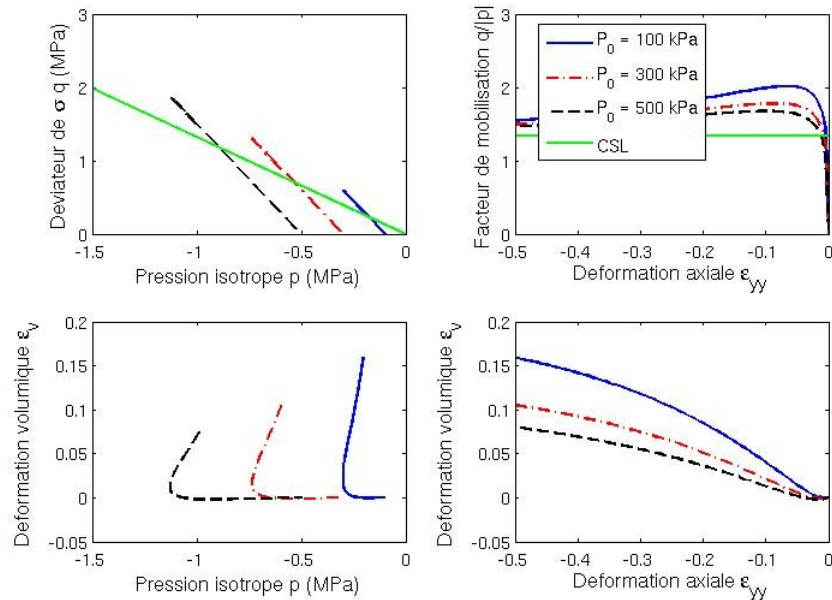


Illustration 7.4 : Essais biaxiaux drainés modélisés avec le modèle de Hujieux dégradé en Cam-Clay - HCC



*Illustration 7.5 : Essais biaxiaux drainés modélisés avec le modèle de Hujeux sans mécanismes isotropes, ni mécanismes cycliques - HJS*



*Illustration 7.6 : Essais biaxiaux drainés modélisés avec le modèle de Hujeux*

### 7.5.3.2 Détermination des domaines et cônes d'instabilités

Sur des chemins biaxiaux drainés de compression, il apparaît des instabilités à l'intérieur strict de la surface limite de Mohr-Coulomb (Desrues et Viggiani (2004)). Hamadi (2006) a réalisé, en se basant sur les travaux de Darve et Laouafa (2000),

une étude numérique sur l'existence d'un domaine d'instabilité matérielle au sens de Hill à l'intérieur strict de la surface limite de Mohr-Coulomb, avec le modèle de Hujeux.

Un développement analytique de la condition de stabilité de Hill uniquement dans la direction associée à ce trajet de chargement  $y$  est présenté. Dans le cas d'un chemin biaxial drainé imposant une contrainte latérale constante, l'expression générale du travail du second ordre devient :

$$d^2 W = d\sigma_1 d\epsilon_1 \quad (7.38)$$

Le travail du second ordre s'annule pour une contrainte incrémentale déviatoire nulle et reste négatif le long de la branche descendante (c'est à dire pente d'adoucissement), si elle existe, tant que le chargement de compression se poursuit.

Les pics de contrainte, s'ils existent, sont atteints à l'extérieur de la surface limite de Mohr-Coulomb (c'est à dire au dessus de la droite d'état critique).

Hamadi (2006) présente la méthodologie systématique de recherche des directions instables, définie par Darve et Laouafa (2000), pour des chemins biaxiaux drainés en compression, en étudiant le signe du travail du second ordre (illustration 7.7), quantité directionnelle dans l'espace des taux de déformations retraduite dans l'espace des contraintes atteintes par le tenseur constitutif du modèle.

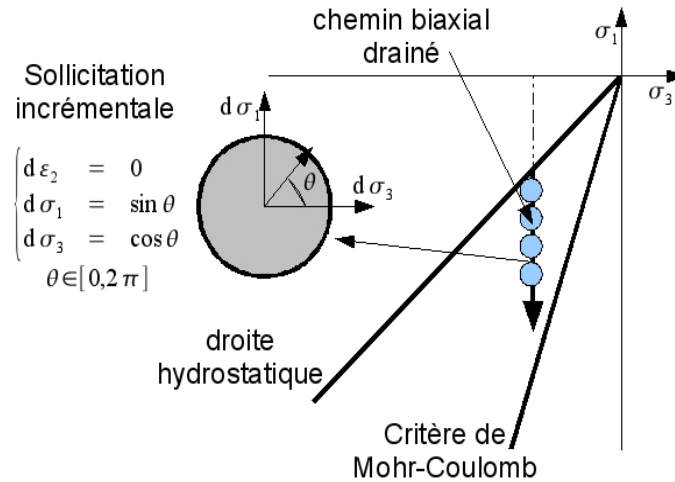


Illustration 7.7 : Procédure de recherche directionnelle des directions instables dans le plan de contraintes au sens de Hill sur un chemin biaxial drainé

La méthode consiste à réaliser un chargement biaxial, suivi par des chemins radiaux en contraintes imposées dans toutes les directions. Sur chaque chemin, la valeur directionnelle de  $d^2 W$  est calculée. Le chemin biaxial drainé est caractérisé par le rapport de contraintes  $\xi = \sigma_1 / \sigma_3$ , décrivant l'état de contrainte après la phase initiale. La limite entre les zones de chargement et déchargement peut être déterminée par la condition suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma = 0 \quad (7.39)$$

Cette méthode de recherche directionnelle ne regroupe pas l'ensemble des directions potentiellement instables du modèle, puisque les directions incluant une variation de la distorsion du milieu ne sont pas incluses. Cette méthode ne représente donc pas une méthode exhaustive des directions instables, mais bien une restriction des directions de sollicitations à une conservation des directions principales du tenseur de contraintes. On pourra en revanche conclure lors de la détection d'une direction d'instabilité du modèle de comportement qu'il existe des directions instables à ce niveau de chargement.

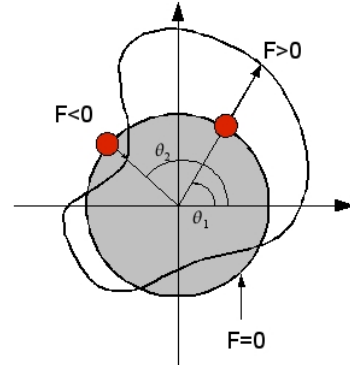


Illustration 7.8 : Diagramme circulaire de la fonction polaire  $F(\theta)$

Par souci de clarté, la présentation circulaire adoptée par Darve et Laouafa (1999) (cités par Hamadi (2006)) est utilisée pour présenter les quantités directionnelles : le travail du second ordre normalisé  $d^2W$ , le déterminant du tenseur de rigidité symétrisé  $\det(H_s^{ep})$  et le déterminant du tenseur de rigidité  $\det(H^{ep})$ . Cette représentation permet d'améliorer la lisibilité en cas de changement de signe de la grandeur considérée  $F(\theta)$ , avec  $\theta$  l'angle caractérisant la direction des incréments de contraintes ou de déformations. L'illustration 7.8 présente le principe de cette méthode.

Un paramètre  $r_0$  est introduit et défini comme supérieur à la valeur minimale de la fonction polaire  $F_p(\theta)$  :

$$\forall \theta, F(\theta) = F_p(\theta) + r_0 \text{ avec } r_0 > |\min(F_p(\theta))| \quad (7.40)$$

La projection dans le plan de la fonction polaire  $F(\theta)$  permet de retrouver une représentation circulaire de la fonction :

$$F(\theta) = \begin{pmatrix} (F_p(\theta) + r_0) \cos \theta \\ (F_p(\theta) + r_0) \sin \theta \end{pmatrix} \quad (7.41)$$

Les méthodologies décrites ci-dessus sont appliquées aux modèles de comportement établis au §7.5.2.

Le travail présenté au §7.5.3.2.2 en complément de celui réalisé par Hamadi (2006) consiste à quantifier l'apport des mécanismes cycliques du modèle de Hujeux lors de l'utilisation de la méthode de recherche de directions instables liées au modèle de comportement. La prise en compte des mécanismes cycliques est effectuée en réalisant des essais biaxiaux cycliques, qui permettent de caractériser l'effet des mécanismes cycliques et de la déformation volumique plastique, qui évolue au cours de ces chargements successifs.

#### 7.5.3.2.1 Modèle de Hujeux dégradé en Cam-Clay - HCC

Pour le modèle HCC, l'apparition de la première direction instable est simultanée à



l'annulation du travail de second ordre dans la direction de chargement pour  $\sigma_3 = 300 \text{ kPa}$ . Cette apparition correspond au pic des contraintes axiales relevé sur l'illustration 7.4.

Pour ce modèle, le domaine d'instabilités pour ce chemin de chargement est directement défini par un cône de directions instables de chargement (illustration 7.9). Les valeurs représentées sont tronquées en fonction du minimum de la fonction à représenter.

Les résultats présentés sont établis pour les paramètres matériaux issus du tableau 7.1 et un état de contraintes initial isotrope  $\sigma_3 = 300 \text{ kPa}$ .

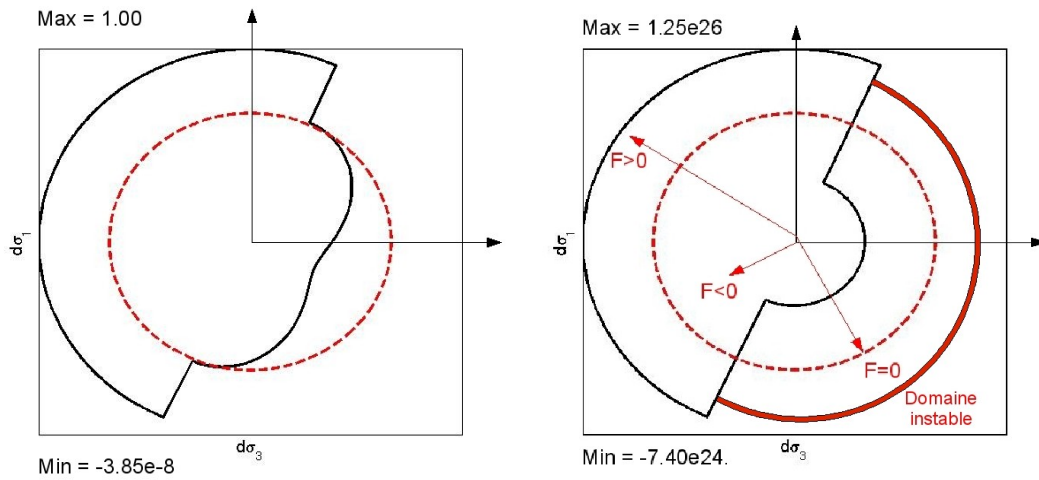


Illustration 7.9 : Représentations circulaires du travail  $d^2W$  (à gauche) et du déterminant  $H^{ep}$  (à droite) en déformations planes pour un état de contraintes latérales  $\sigma_3 = 300 \text{ kPa}$  au pic de contraintes pour le modèle HCC

Les résultats issus du déterminant de  $H_s^{ep}$  ne sont pas présentés puisque ce modèle constitutif est à écoulement associé. Le tenseur de rigidité  $H^{ep}$  demeure toujours symétrique. Les résultats issus du déterminant de  $H^{ep}$  sont identiques à ceux du déterminant de  $H_s^{ep}$ .

### 7.5.3.2.2 Modèle de Hujeux

Les domaines de directions instables évoluent au cours du chargement de compression drainé avec le modèle de Hujeux complet et également celui défini sans les mécanismes déviatoires cycliques et mécanismes isotropes (HJS). Les résultats obtenus sont présentés sur l'illustration 7.10 dans le plan  $[\sigma_1, \sigma_3]$ . Les droites de chargement hydrostatique et d'état critique sont également indiquées dans ce plan. Sur l'illustration 7.10a, on représente la première direction instable obtenue par la méthode présentée sur l'illustration 7.7 pour cinq valeurs différentes de confinement  $\sigma_3$  variant entre  $[-500 \text{ kPa}, -100 \text{ kPa}]$ . Sur l'illustration 7.10b, seuls les résultats de trois pressions de confinement sont représentés dans le but d'améliorer la lisibilité des résultats.

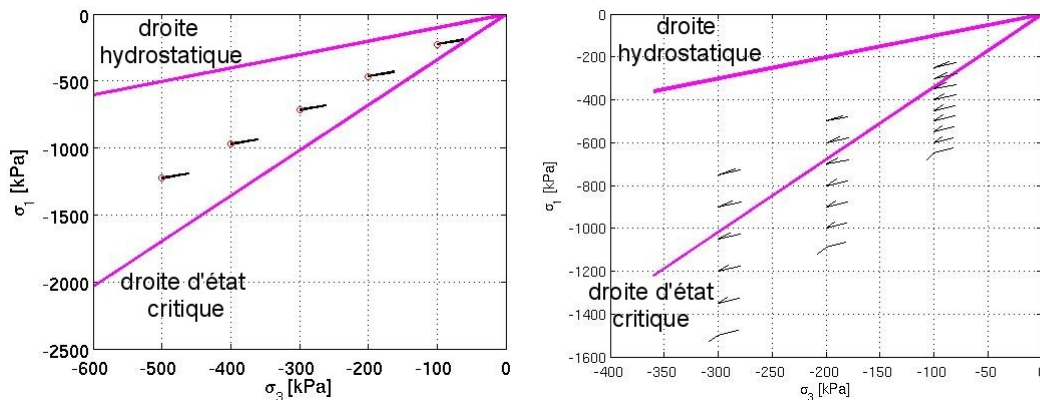


Illustration 7.10 : Première direction instable (gauche-a) et cônes d'instabilités (droite-b) en déformations planes dans le plan  $[\sigma_1, \sigma_3]$  pour le modèle HJS au sens de Hill : sable d'Hostun à  $DR=88\%$

Les résultats obtenus corroborent ceux de Hamadi (2006) et un large domaine potentiellement instable apparaît pour les différents états de contrainte initiaux testés.

Les frontières d'initiation des domaines instables se situent, pour les états de contrainte présentés, à une valeur limite de  $\xi > 2$ , valeur inférieure à la droite d'état critique caractérisée par  $\xi = 3,39$  (illustration 7.10a).

Si on poursuit le chargement, plusieurs directions peuvent alors conduire, pour le modèle de Hujeux, à des instabilités restreintes à un cône unique de directions instables (illustration 7.10b). Ces directions sont orientées dans le sens d'une décharge des contraintes. On remarque également que le chemin biaxial drainé n'est jamais instable avant d'atteindre le pic de contraintes (cône représenté par le dernier cône de chaque  $\sigma_3$ ), puisque la direction verticale n'est jamais incluse dans ces cônes.

Avec le modèle de Hujeux, contrairement au modèle INL de Darve (1980) (Prunier (2008)), il n'y a pas apparition d'un second domaine d'instabilités pour des incréments de contraintes en direction de chargement.

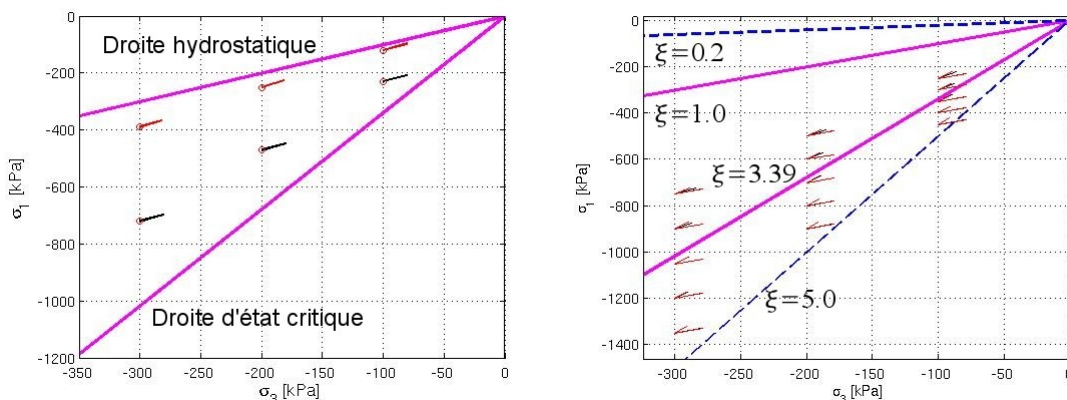
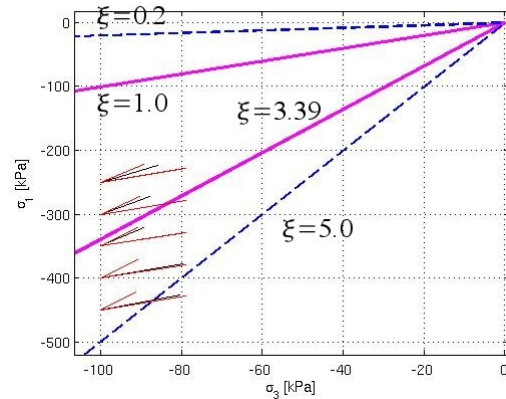


Illustration 7.11 : Première direction instable (gauche-a) et cônes d'instabilités (droite-b) en déformations planes dans le plan  $[\sigma_1, \sigma_3]$  pour le modèle HJS au sens de Hill : sable d'Hostun à  $DR=88\%$  ; chargement monotone (noir) – chargement cyclique (rouge)

En considérant le modèle de Hujeux intégrant les mécanismes déviatoires cycliques, on remarque après un cycle de charge-décharge-recharge ( $\xi \rightarrow 5$ ,  $\xi \rightarrow 0,2$ ,  $\xi \rightarrow 5$ ), une évolution concernant le domaine d'instabilités du matériau. La première direction instable apparaît pour une valeur de  $\xi$  plus faible et le cône d'instabilités s'agrandit avec l'évolution de  $\epsilon_v^p$  pour un matériau dilatant (illustration 7.11b+zoom sur l'illustration 7.12).

Cependant, cette analyse d'instabilité matérielle est menée pour un champ de déformation et de contrainte obtenu sur la branche fondamentale de solutions homogènes. Les problèmes aux limites définis par des champs de contrainte et de déformation non homogènes peuvent être soumis, en pratique, à des instabilités, si les directions des incréments de contrainte sont contenus dans le cône des directions instables et que les sollicitations externes et les conditions aux limites cinématiques leur permettent de se développer.



*Illustration 7.12 : Cônes d'instabilités en déformations planes dans le plan  $[\sigma_1, \sigma_3]$  pour le modèle HJS au sens de Hill : sable d'Hostun à  $DR=88\%$  ; chargement monotone (noir) – chargement cyclique (rouge)*

La représentation circulaire du travail de second ordre, du déterminant des tenseurs de rigidité symétrisé et tangentielle permet de justifier les résultats présentés sur l'illustration 7.10b. Pour un état de contrainte initial  $\sigma_3=300\text{ kPa}$ , l'illustration 7.13a présente les représentations circulaires du travail de second ordre au point d'apparition de la première direction instable et pour un rapport de contrainte  $\xi=3,00$ . On constate une première direction d'instabilités à  $\theta=52$  degrés pour laquelle le travail de second ordre devient négatif (valeur en accord avec les travaux de Hamadi (2006), qui trouvait un angle compris dans l'intervalle  $\theta=50$  degrés et  $\theta=55$  degrés). La représentation polaire de  $\det(H_s^{ep})$  permet d'identifier une zone tensorielle beaucoup plus large où la condition  $\det(H_s^{ep}) \leq 0$  est remplie (illustration 7.13b). Néanmoins, le cône d'instabilités détectées avec la condition de Hill est toujours inclus dans la zone où  $\det(H_s^{ep}) \leq 0$ . Le pic de contrainte n'étant pas encore atteint, le déterminant du tenseur de rigidité tangentielle reste toujours positif (illustration 7.13c), mais sa valeur diminue au cours du chargement.

De même que pour l'illustration 7.9, les valeurs représentées sous leur forme polaire sont tronquées en fonction du minimum de la fonction à représenter.

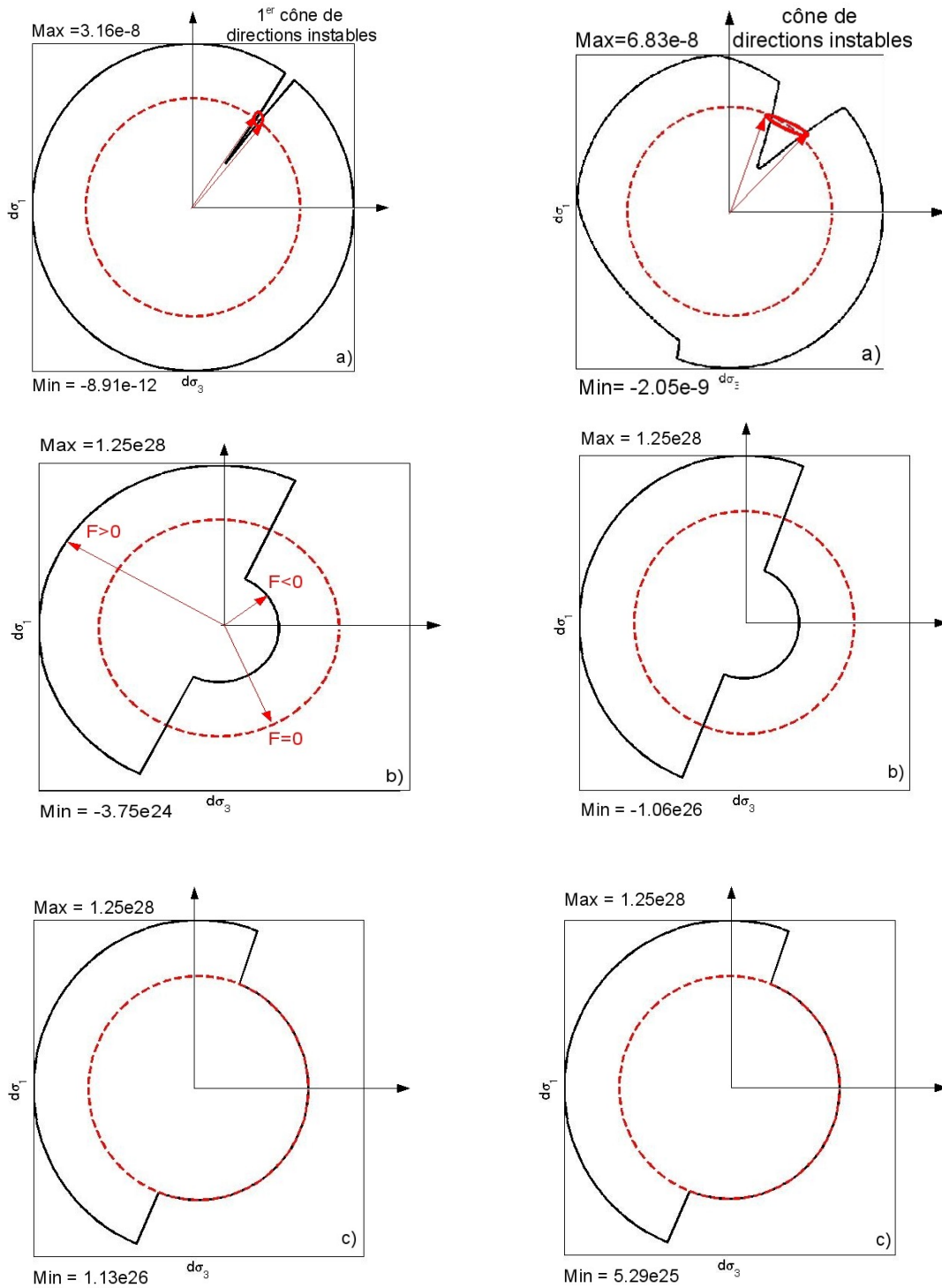


Illustration 7.13 : Représentation polaire du  $d^2 W$  (a) ;  $\det(H_s^{ep})$  (b) ; et  $\det(H^{ep})$  (c) avec le sable d'Hostun à DR=88% (gauche -  $\xi=2,37$  et droite -  $\xi=3,00$  )

Les points abordés en regard du modèle de Hujeux complet, c'est à dire intégrant les mécanismes cycliques, sont repris sur l'illustration 7.14 pour exprimer en représentation polaire la dimension élargie du cône d'instabilités induite par

l'évolution de  $\epsilon_v^P$ .

Le jeu de paramètres matériau conduit bien à des instabilités matérielles à l'intérieur strict du critère de Mohr-Coulomb, à l'inverse du modèle HCC. Ces cônes d'instabilités sont sources d'instabilités constatées au cours des modélisations par éléments finis avec le modèle de Hujeux complet ou réduit à ses surfaces déviatoires monotones, HJS. Ces sources d'instabilités dans les calculs par éléments finis seront abordées au §7.5.5.2.

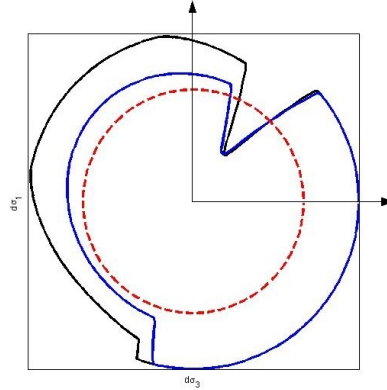


Illustration 7.14 : Représentation polaire du  $d^2 W$  avec le sable d'Hostun à  $DR=88\%$  pour  $\xi=3,00$  ; chargement monotone (noir) – chargement cyclique (bleu)

#### 7.5.4 Hypothèses de calcul

L'algorithme de résolution de Code\_Aster est décrit brièvement dans cette section. Une description plus complète est proposée dans la documentation en ligne [R5.03.01].

Il s'agit de l'algorithme de Newton utilisé pour résoudre les problèmes quasi-statiques non linéaires. La solution d'équilibre au problème posé est obtenue de proche en proche. Pour faciliter la convergence du calcul, un paramètre assimilé au temps, sans en avoir nécessairement la signification physique, est ajouté dans le but d'introduire une discrétisation du contrôle du chargement appliqué.

A chaque pas de temps  $t$ , l'équilibre mécanique est assuré par la relation vectorielle suivante (exposée également au §9.8.2) :

$$R(u_i^t) = F^{ext}(t) \quad (7.42)$$

où  $F^{ext}$  représente les forces extérieures appliquées à la structure et

$R(U(t)) = {}^tQ \cdot \sigma_{(U(t),t)}$ ,  $Q$  étant l'opérateur discret représentant l'intégrale des puissances de déformations virtuelles sur le domaine complet et  $\sigma$  le champ de contraintes discrétisé calculé en chaque point matériel du domaine.  $u_i^t$  sont les composantes du champ de déplacement ( $u^t$ ). La résolution du système d'équations non linéaires est réalisée en utilisant la méthode de Newton-Raphson, dont l'initialisation est donnée par une technique d'Euler explicite, suivie d'itérations de correction :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial R}{\partial u_i^{n,t}} \right|_{u_i^{n,t}} \delta u_i^{n+1} = -R(u_i^{n,t}) + F^{ext}(t) \\ u_i^{n+1,t} = u_i^{n,t} + \delta u_i^{n+1} \end{cases} \quad (7.43)$$

où  $u_i^{n,t}$  désigne l'inconnue nodale du champ de déplacement à l'itération  $n$  du

pas de temps en cours  $t$ .  $\delta u_i^n$  est la correction incrémentale de  $u_i^t$  à l'itération  $n$  de Newton.

Un critère de convergence est établi en rapport avec la norme du vecteur résidu :

$$\frac{\|R(u_i^{n,t}) - F^{ext}(t)\|_\infty}{\|F^{ext}(t)\|_\infty} < \eta_{tol} \quad (7.44)$$

où  $\eta_{tol}$  est une tolérance à respecter pour obtenir convergence et  $\|\cdot\|_\infty$  la norme usuelle des vecteurs.

Le retour d'expérience sur les différents calculs menés pour modéliser les essais biaxiaux drainés ont montré qu'il était nécessaire pour traiter les comportements adoucissants d'apporter des modifications à l'algorithme de Newton-Raphson. Fernandes (2009a) préconise ainsi l'emploi d'une méthode de pilotage pour obtenir la convergence des calculs avec le modèle local de Drucker-Prager. Nous avons alors tenté d'appliquer cette approche.

Le principe des méthodes de pilotage consiste à déterminer l'intensité d'une partie du chargement pour satisfaire une contrainte sur les déplacements. La méthode de pilotage qui a été utilisée, disponible dans Code\_Aster, est décrite dans le document [R5.03.80] disponible sur le site du Code\_Aster. Elle introduit des équations de contrôle par incrément de déformation (voir Lorentz et Badel (2004)). Dans ce cas, la direction de déformation du pas de temps courant doit être la même que celle du début du pas de temps pour au moins un point de la structure. La continuité de la déformation est ainsi assurée.

Malheureusement, les résultats obtenus avec cette méthode ne sont pas satisfaisants et mettent rapidement en défaut l'intégration locale du modèle de Hujeux. Cette mise en défaut du modèle de Hujeux apparaît pour des incréments de déformations très importants. La méthode de pilotage a alors été couplée non plus à

l'opérateur tangent global  $\left. \frac{\partial R}{\partial u_i^{n,t}} \right|_{u_i^{n,t}}$ , mais à l'opérateur élastique  $\hat{K}^e$  établi à

partir des propriétés élastiques non linéaires du milieu (cf équation 3.10). Cette méthode de résolution du problème non linéaire en comparaison à l'approche classique de type Newton-Raphson modifié n'a pas donné de meilleurs résultats. Elle a été utilisée en dernier recours, lorsque la méthode de Newton-Raphson modifié divergeait (§7.5.5.2).

Pour l'ensemble des calculs présentés ci-après, si aucune mention particulière n'est indiquée, la convergence numérique est considérée acquise pour une norme du vecteur résidu relatif sur l'équilibre inférieure à  $\eta_{tol} \leq 10^{-4}$  (défini à l'équation 7.44).

### 7.5.5 Comparaison des résultats numériques et analytiques

Dans le cadre de ces travaux, nous avons réalisé la simulation par la méthode des éléments finis d'un essai biaxial sur sable d'Hostun avec le modèle de Hujeux, dont les propriétés des matériaux ont été établies par Lopez-Caballero et al. (2003b) (tableau 7.1). La modélisation est basée sur le couplage de la méthode de second gradient de dilatation (Fernandes et al., 2008) au modèle de Hujeux (Hujeux, 1985) pour la partie premier gradient.

Le but de ce travail est de déterminer les paramètres majeurs contrôlant la largeur



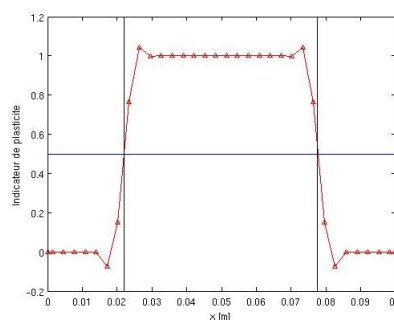
de la bande de cisaillement. L'idée initiale consiste à relier les résultats obtenus avec l'essai de cisaillement analytique présenté au §7.4.1 aux résultats issus de la méthode des éléments finis pour différents essais biaxiaux drainés. En effet, après une campagne d'essais numériques consistant à faire varier les états de contraintes initiales ou la pression critique de référence, des évolutions importantes ont été relevées pour la largeur de la bande de cisaillement. Ces évolutions de largeur de bandes en fonction des états de contraintes ou des variables internes doivent être maîtrisées dans l'optique d'une utilisation industrielle du couplage modèle de Hujieux/modèle de second gradient de dilatation.

En simplifiant le problème d'instabilités mis en avant lors d'un essai biaxial drainé, la problématique consiste à maîtriser la largeur de la bande de localisation lors de l'essai biaxial pouvant se ramener au problème analytique présenté au §7.4.1.

Cette simplification du problème peut être utilisée au point d'initiation de la bifurcation en bande de cisaillement. L'exercice, mené ci-dessous, traite le problème de bandes dans un repère local soumis à un angle de rotation évolutif correspondant à l'orientation de la bande dans l'échantillon.

Pour l'ensemble des résultats présentés pour la campagne d'essais numériques, des procédures automatiques ont été mises en place pour déterminer la largeur de la bande de localisation dans l'échantillon.

Deux lignes de coupe sont définies de telle sorte qu'elles passent au centre de l'échantillon, une selon la direction 1 (verticale) et la seconde selon la direction 3 (horizontale). Les valeurs relevées le long de ces lignes de coupe sont les indicateurs de plasticité du mécanisme plastique  $M_2^m$  du modèle de Hujieux. Il s'agit néanmoins d'un champ aux noeuds. Ce champ est issu d'une extrapolation des points de Gauss aux noeuds. Cette première étape entraîne nécessairement une perte de précision sur les valeurs à relever. De plus, l'indicateur de plasticité, varie comme un entier entre 0 pour l'élasticité, 1 pour la charge plastique et -1 pour les décharges (exemple illustration 7.15). La lecture de ce champ entraîne donc des approximations sur les valeurs relevées pour la comparaison aux solutions analytiques. La largeur de bande est évaluée pour tous les noeuds suivant la ligne de coupe définie dans l'échantillon pour des valeurs d'indice plastique supérieures à 0,5. La correction à apporter aux résultats doit intégrer une augmentation des largeurs de bande égale à la largeur d'un élément fini. En effet, le passage entre les zones élastiques et plastiques est toujours concentré sur un élément.



*Illustration 7.15 : Indicateur de plasticité suivant une coupe sur un échantillon lors d'un essai biaxial*

Les angles d'orientation des bandes de cisaillement sont finalement établis à partir des valeurs de longueur caractéristique relevées horizontalement et verticalement.

#### **7.5.5.1 Résultats obtenus avec le modèle HCC**

L'objet de cette section consiste à présenter la démarche mise en place pour évaluer la pertinence de l'exemple analytique de la couche cisailée (§7.4.1) et à définir les paramètres influençant la largeur de la bande de cisaillement dans le cadre de simulations numériques d'essais biaxiaux drainés. Cette démarche est

menée suivant les points suivants :

- Évaluer et vérifier la dépendance de la largeur de la bande de cisaillement à la racine du module de rigidité ( $\sqrt{b_s}$ ) ;
- Extraire des simulations numériques la valeur du coefficient, fonction des états de contraintes et propriétés matériaux, porté devant la fonction en  $\sqrt{b_s}$  dont dépend la largeur de la bande de cisaillement, noté par la suite  $F(P_0, P_{c0})$  ;
- Comparer la valeur de  $F(P_0, P_{c0})$  issue des simulations numériques au coefficient obtenu via la solution analytique établie à l'équation 7.33 du §7.4.1.2 ;
- Au point de bifurcation (transition élastique/plastique), effectuer une rotation des composantes du tenseur de  $\sigma$  dans le repère local de la couche cisailée potentielle analogue au problème analytique :
  - Évaluer le tenseur de rigidité  $H$  pour cet état de contrainte local ;
  - Établir les secteurs d'angle susceptibles de produire une perturbation périodique au champ de solutions homogènes ;
  - Calculer la valeur de  $F(P_0, P_{c0})$  analytique pour les angles d'inclinaison concernés ;
  - Comparer les valeurs analytiques à celles issues des simulations numériques.

Les résultats présentés ci-dessous ont été obtenus avec le modèle HCC (présenté au §7.5.2.1 ). Ce modèle dégradé nous permet de limiter les temps CPU des simulations sans nuire à la portabilité des résultats obtenus au modèle de Hujeux complet.

La première partie de la campagne d'essais a consisté à caractériser l'évolution de la largeur de la bande de cisaillement en fonction du module élastique de rigidité du modèle de second gradient  $b_s$  (voir équation 7.16). Dans le but d'obtenir une large gamme de valeurs, quatre géométries différentes ont été utilisées avec, pour chacune d'elle, un nombre d'éléments finis constant. Les facteurs d'échelle utilisés étaient égaux à 1, 2, 5 et 10 par rapport à la configuration initiale de l'échantillon de 10 cm de large sur 20 cm de haut. Les dimensions des échantillons et les caractéristiques des maillages sont reportées dans le tableau 7.2 :

Nom géométrie	Hauteur x Largeur [m x m]	Élément fini (EF)	Dimensions EF (H x L) [m x m]	Nombre total d'éléments Finis
Échantillon x1	0,2 x 0,1	QUAD8	0,00625 x 0,00625	512 (32 x 16)
Échantillon x2	0,4 x 0,2		0,0125 x 0,0125	
Échantillon x5	1 x 0,5		0,03125 x 0,03125	
Échantillon x10	2 x 1		0,0625 x 0,0625	

**Tableau 7.2 : Caractéristiques géométriques des différents échantillons utilisés durant la campagne d'essais numériques**



Les gammes de valeurs utilisées pour le module  $b_s$  associées à chaque maillage ont été établies à partir des premières valeurs obtenues avant le début de la campagne majeure d'essais numériques. Chaque intervalle de valeurs se recoupe sur deux valeurs du module  $b_s$  pour s'assurer de la continuité des valeurs relevées.

Les premiers résultats obtenus par la méthode des éléments finis ont confirmé une dépendance en  $\sqrt{b_s}$  de la largeur de la bande pour l'ensemble des essais. Pour une pression isotrope de  $500\text{ kPa}$  et une pression de consolidation de  $P_{c0}=4\text{ MPa}$ , les résultats sont présentés sur l'illustration 7.16. Les résultats éléments finis sont relativement proches des solutions fournies par l'équation analytique 7.33 (§7.4.1.2) malgré une précision variable, fonction de la qualité des intervalles de valeurs du module  $b_s$  pour le maillage utilisé.

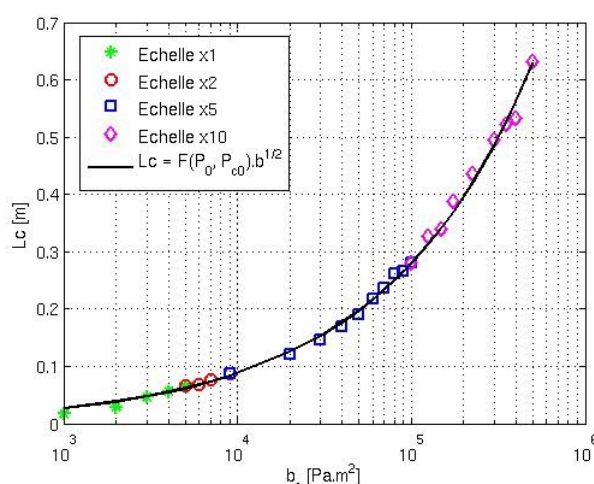


Illustration 7.16 : Évolution de la largeur de la bande de localisation en fonction de  $b_s$  pour  $P_{c0}=4\text{ MPa}$  et  $P_0=500\text{ kPa}$  avec le modèle HCC

La campagne d'essais numériques qui suit consiste à faire varier la pression initiale de l'échantillon  $P_0$ , puis à faire varier la pression de consolidation critique du modèle,  $P_{c0}$ , pour un second type d'essais. En effet, la dépendance des composantes du tenseur  $H^{ep}$  en fonction de  $P_0$  et  $P_{c0}$  ne peut pas s'écrire directement. Tous les essais réalisés sont néanmoins restreints à des matériaux dilatants. Ces campagnes d'essais ont montré une dépendance non linéaire de la largeur de la bande aux propriétés initiales du matériau. En admettant une relation du type  $l_c = \sqrt{b_s} F(P_0, P_{c0})$ , avec  $l_c$  la largeur de bande, les résultats numériques d'évolution de la fonction  $F(P_0, P_{c0})$  sont présentés sur l'illustration 7.17.

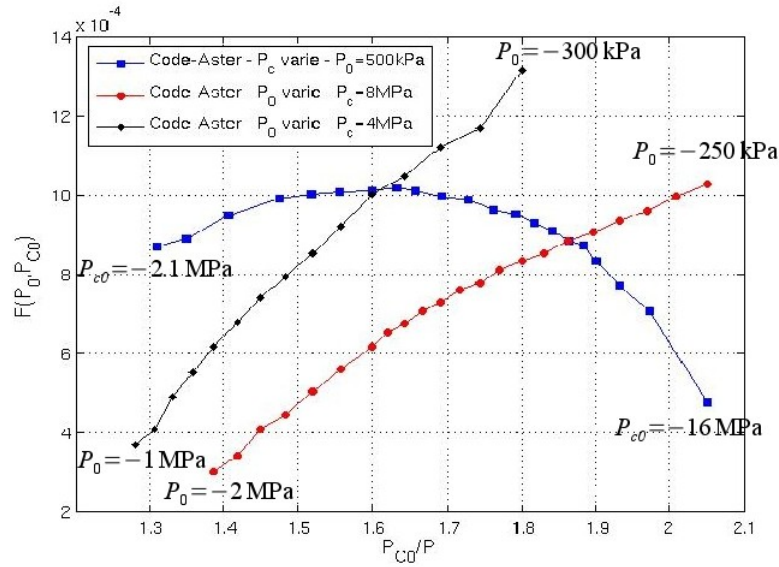


Illustration 7.17 : Évolution de la fonction  $F(P_0, P_{c0})$  en fonction de  $P_{c0}/P$  obtenue par la méthode des éléments finis

Sur l'axe des abscisses sont reportées les valeurs du rapport  $P_{c0}/P$  au pic de contraintes atteint lors de l'essai biaxial drainé pour les différents essais réalisés. La valeur de la pression isotrope  $P$  dans le plan  $k$  considéré est obtenue à partir de la relation non linéaire suivante :

$$f_k = q_k + MP \left( 1 - \ln \left( \frac{P}{P_{c0}} \right) \right) = 0 \text{ tel que } \begin{cases} P = \frac{\sigma_{ii} + \sigma_{jj}}{2} \\ q_k = \frac{|\sigma_{ii} - \sigma_{jj}|}{2} \\ \sigma_{ii} = P_0 = \text{cste} \end{cases} \quad (7.45)$$

Les états de contraintes établis via la relation 7.45 sont représentés dans le plan  $(p_k, q_k)$  sur l'illustration 7.18 pour les campagnes d'essais réalisés.

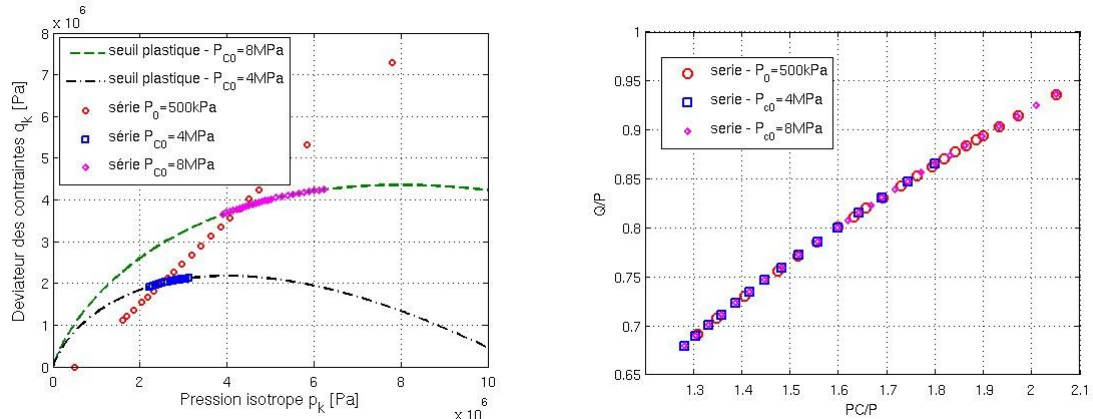


Illustration 7.18 : Valeurs des contraintes testées pour l'ensemble des séries de simulations numériques avec le modèle HCC

La courbe bleue avec des symboles carrés apparaissant sur l'illustration 7.17 reprend les résultats obtenus pour une pression isotrope initiale constante,  $P_0 = 500 \text{ kPa}$ . Les pressions de confinement initiales,  $P_{c0}$ , varient entre les valeurs de  $2,1 \text{ MPa}$  et  $16 \text{ MPa}$ . Les états de contraintes testés sont représentés sur l'illustration 7.18 dans le plan  $(p_k, q_k)$  par des ronds rouges. Les résultats de l'illustration 7.17 montrent une dépendance non linéaire très marquée de la fonction  $F(P, P_{c0})$  par rapport à  $P_{c0}/P$ , avec  $P$  la valeur de pression isotrope appliquée au point de bifurcation étudié, équivalent au pic de contraintes obtenu durant les essais biaxiaux.

La courbe rouge avec des symboles ronds de l'illustration 7.17 reprend les résultats obtenus pour une pression critique initiale constante,  $P_{c0} = 8 \text{ MPa}$ . Les pressions de confinement initial  $P_0$ , varient entre les valeurs de  $250 \text{ kPa}$  et  $2 \text{ MPa}$ . Les états de contraintes testés sont représentés sur l'illustration 7.18 dans le plan  $(p_k, q_k)$  par des losanges roses. Les résultats montrent pour cette campagne dans l'intervalle de valeurs testées une dépendance quasi-linéaire sur un large domaine de la fonction  $F(P, P_{c0})$  par rapport au quotient  $P_{c0}/P$  (illustration 7.17).

De même sur l'illustration 7.18 (carrés bleus), on retrouve les trajets de chargement suivis pour une autre pression de confinement critique,  $P_{c0} = 4 \text{ MPa}$  et dont les résultats sont présentés par la courbe noire avec des symboles en losange sur l'illustration 7.17. L'intervalle de valeurs pour la pression isotrope initiale a été choisi entre  $300 \text{ kPa}$  et  $1 \text{ MPa}$ . Les résultats présentent un comportement similaire à la deuxième campagne d'essais, à savoir une dépendance quasi-linéaire de  $F(P, P_{c0})$  sur le domaine d'études.

Par la suite, la problématique porte sur les capacités du modèle analytique présenté au §7.4.1, soumis à un chargement mixte de cisaillement et de compression, à justifier les résultats obtenus avec le logiciel par éléments finis Code\_Aster. Différentes procédures ont été développées pour réaliser les mêmes campagnes d'essais que celles présentées ci-dessus.

La procédure, implantée sous Matlab, calcule, pour un état initial donné des contraintes et variables internes, la valeur de  $\Delta$  (discriminant de l'équation caractéristique 7.29 du §7.4.1.2) pour différentes orientations de la bande de cisaillement. L'écriture explicite des composantes du tenseur de rigidité pour le modèle HCC est présentée en annexe 9.11.

Une rotation de la bande de cisaillement d'un angle  $\theta$  implique une rotation locale appliquée aux composantes du tenseur des contraintes. Elle permet d'estimer les nouvelles composantes du tenseur constitutif local du modèle de comportement classique, portant sur le premier gradient des déplacements.

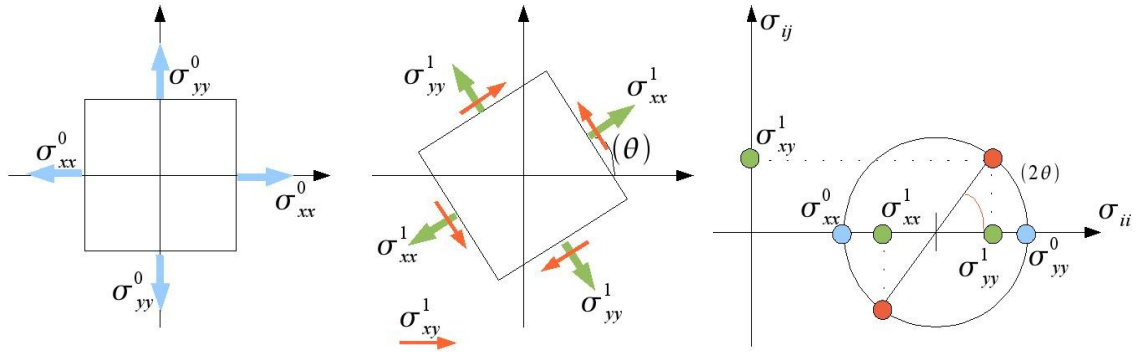


Illustration 7.19 : Rotation du tenseur des contraintes locales

Les premières comparaisons sont menées sur la campagne d'essais à  $P_0$  constant,  $P_0 = 500 \text{ kPa}$ . Les résultats, visibles sur l'illustration 7.21a, ont montré qu'un intervalle de valeurs d'angle d'inclinaison des bandes de cisaillement satisfait le critère  $\Delta < 0$ , équivalent à l'apparition de solutions oscillantes au problème traité. Les bornes de cet intervalle évoluent en fonction de l'état de contraintes au pic. En réalisant une coupe à différents angles du repère local, on constate une valeur stable de  $\Delta$  pour une large gamme des valeurs testées à l'angle  $\theta = 40^\circ$  (illustration 7.20 à partir de l'illustration 7.21a).

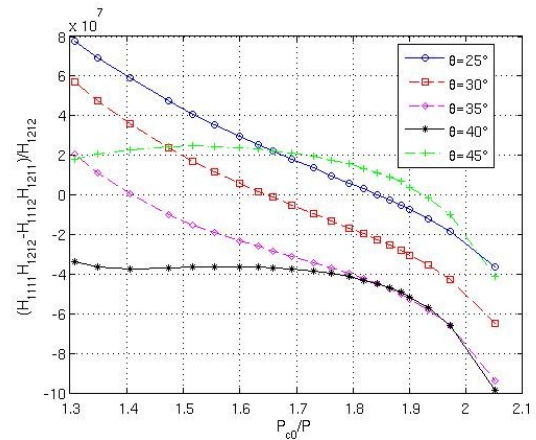


Illustration 7.20: Valeurs de  $b\Delta = \frac{H_{1111}H_{1212} - H_{1112}H_{1211}}{H_{1212}}$  pour la série  $P_0$  constant pour différentes orientations du repère local, avec le modèle HCC

Chambon et Moullet (2004) précisent notamment que l'existence d'un intervalle de valeurs d'angles d'orientation est due à la discontinuité de la pente de la courbe de contraintes-déformations, correspondant au pic des contraintes déviatoires pour le modèle HCC. Pour cet état de contraintes donné, il existe donc une infinité de solutions pour l'orientation de la bande de cisaillement.

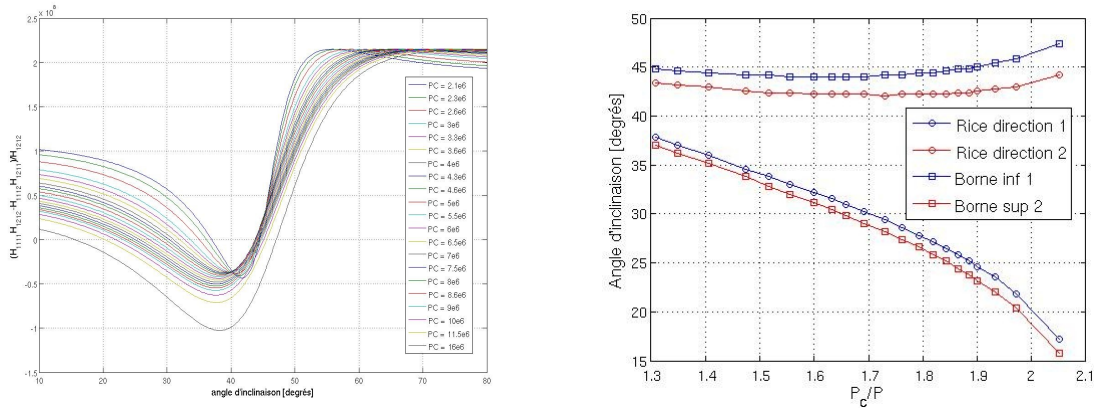


Illustration 7.21 : a) Évolution de  $\Delta$  en fonction de l'angle d'inclinaison de la bande de localisation pour différentes valeurs de pression critique de confinement  $P_{c0}$  et  $P_0 = 500 \text{ kPa}$  ; b) Évolution des angles d'inclinaison limites et des directions de Rice en fonction de  $P_{c0}/P$

Il est toutefois intéressant de comparer les valeurs limites de l'angle d'inclinaison de la bande de cisaillement avec les valeurs obtenues par le critère de Rice (cf §6.5.4.2.1). Les valeurs limites sont obtenues à partir des conditions d'apparition de solutions oscillantes au problème analytique. Les directions de bifurcations en mode supposé de bandes de cisaillement sont obtenues à partir du signe du déterminant du tenseur acoustique,  $\det(nHn) < 0$ , établies suivant le critère de Rice (cf Annexe 9.12 et illustration 7.21b). Les composantes du tenseur  $H$  sont évaluées à partir de l'état de contraintes de la solution fondamentale homogène. Les directions  $n_1$  et  $n_2$  obtenues à partir du critère de Rice sont à l'intérieur strict du domaine des angles limites définis par la condition  $\Delta < 0$ .

Le choix de l'angle d'inclinaison local de la bande de cisaillement, nécessaire pour réaliser une comparaison qualitative et quantitative des résultats analytiques aux résultats obtenus par éléments finis, a tout d'abord été fait pour chaque essai suivant un critère retenant le minimum de la valeur de

$$(-\omega^2) = \frac{H_{1111}H_{1212} - H_{1112}H_{1211}}{b_s H_{1212}}, \text{ assurant ainsi la longueur d'onde la plus courte}$$

des solutions oscillantes  $l_c = \frac{2\pi}{|\omega|}$ .

En réalisant une approche inverse du problème, on peut rechercher les valeurs de  $\Delta$  assurant une différence minimum de  $F(P_0, P_{c0})$  avec les valeurs relevées à partir du modèle par éléments finis (ex : illustrations 7.22a et 7.22b). Ainsi, on peut obtenir la valeur de l'angle d'inclinaison de la bande.

Sur les illustrations 7.22a et 7.22b figurent également deux autres approches. La première définit l'angle d'inclinaison choisi pour la bande de cisaillement comme égal à la médiane de l'intervalle des angles d'inclinaison obtenus (voir illustration 7.21a). La seconde approche calcule l'angle d'inclinaison de la bande comme le barycentre de la fonction  $\Delta$  sur l'intervalle angulaire considéré (illustration 7.21a).

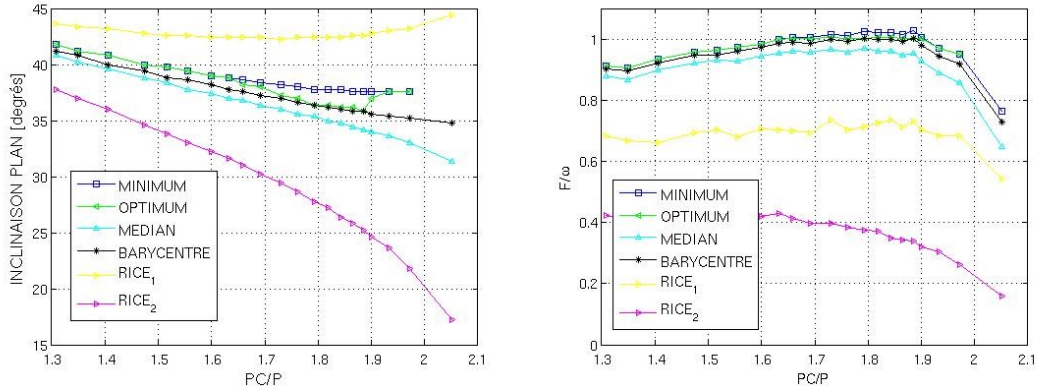


Illustration 7.22 : a) Évolution de l'angle d'inclinaison de la bande en fonction de  $P_{c0}/P$  (gauche) ; b) Évolution du rapport entre la solution éléments finis et les solutions analytiques en fonction de  $P_{c0}/P$ ,  $F/\omega$  (droite) ;  $P_0=500 \text{ kPa}$

Les résultats pour le problème inverse, à savoir déterminer l'angle d'inclinaison « optimum » minimisant l'erreur avec les résultats des éléments finis, mettent en avant un angle d'inclinaison de la bande de cisaillement variable entre l'angle minimisant la valeur de  $\Delta$  et la valeur de l'angle barycentre de la fonction  $\Delta$ . L'angle d'inclinaison de la bande varie pour cette campagne d'essais, d'après l'approche analytique, entre 37 degrés et 42 degrés.

L'illustration 7.22b présente le rapport entre la solution obtenue à partir des modèles par éléments finis et les différentes approches analytiques présentées ci-dessus. Une concordance parfaite entre le modèle analytique et les résultats numériques conduit à une valeur unitaire du rapport  $F(P_0, P_{c0})/(-b_s \omega)$ .

Les résultats sont relativement précis et permettent d'estimer par l'approche analytique, à seulement 10% d'erreur maximum, la valeur de  $F(P, P_{c0})$ , si l'on néglige le dernier point obtenu avec la méthode des éléments finis, pour un rapport de  $P_{c0}/P \approx 2,05$ . L'écart des solutions par éléments finis et celles obtenues avec le critère de Rice est relativement important (>30%) mais présente un profil très stable. La différence est uniquement quantitative.

Les écarts relatifs constatés entre les deux approches peuvent être reliés aux incertitudes sur les valeurs numériques relevées. En effet, la détermination de  $F(P, P_{c0})$  est le résultat d'une approximation pour un état initial  $(P_0, P_{c0})$  associé aux multiples essais numériques réalisés où les paramètres évoluant sont le module  $b_s$  et les dimensions géométriques de l'échantillon. L'illustration 7.23 représente l'évolution du coefficient de régression établi à partir d'une méthode des moindres carrés entre les valeurs relevées numériquement et la fonction théorique  $l_c = F(P, P_{c0})\sqrt{b_s}$ . En comparant les résultats des illustrations 7.22b et 7.23, on note

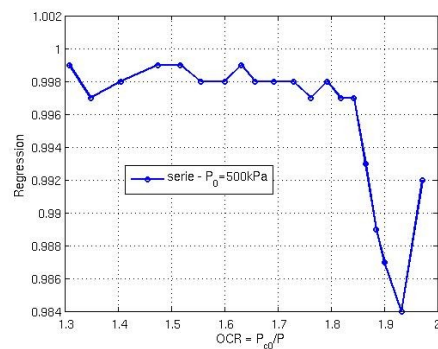


Illustration 7.23 : Évolution du coefficient de régression entre l'approche analytique et les résultats numériques en fonction du rapport  $P_{c0}/P$



que l'erreur obtenue entre  $F(P_0, P_{c0})$  et  $(-b_s \omega)$  est liée à la baisse de précision des résultats numériques relevés.

Le même processus peut être réalisé pour la campagne d'essais à  $P_{c0}$  constant et  $P_0$  variant. Les résultats en terme d'inclinaison des bandes de cisaillement et les erreurs sont similaires à la campagne d'essais précédemment étudiée (illustrations 7.24 et 7.25).

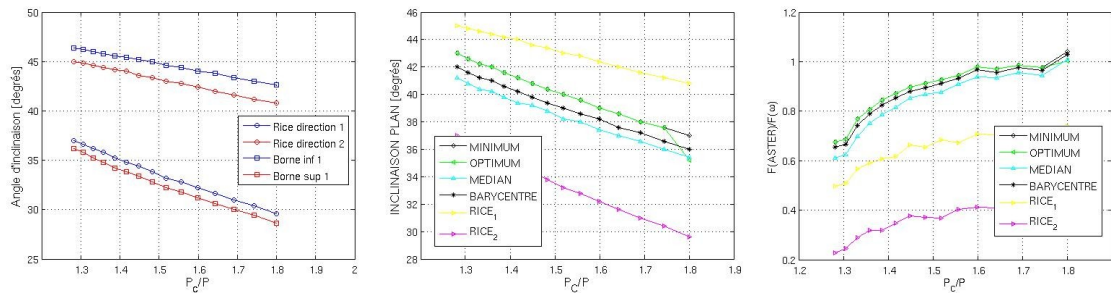


Illustration 7.24 : a) Évolution des angles d'inclinaison limites et des directions de Rice en fonction de  $P_{c0}/P$  pour  $P$  qui varie ; b) Évolution des angles d'inclinaison de la bande en fonction de  $P_{c0}/P$  ; c) Évolution du rapport entre la solution par éléments finis et les solutions analytiques en fonction de  $P_{c0}/P$  ;  $P_{c0} = cste = 4 \text{ MPa}$

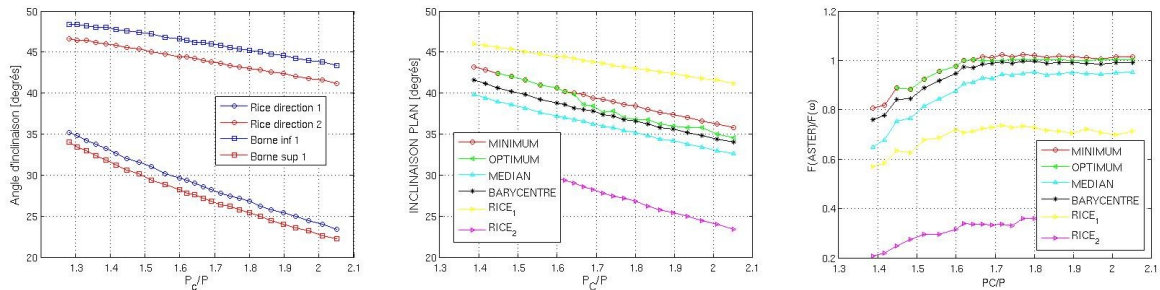


Illustration 7.25 : a) Évolution des angles d'inclinaison limites et des directions de Rice fonction de  $P_{c0}/P$  ; b) Évolution des angles d'inclinaison de la bande en fonction de  $P_{c0}/P$  ; c) Évolution du rapport entre la solution par éléments finis et les solutions analytiques en fonction de  $P_{c0}/P$  ;  $P_{c0} = cste = 8 \text{ MPa}$

Il est également possible de vérifier que les angles d'inclinaison des bandes de localisation obtenus par la méthode inverse correspondent effectivement aux valeurs d'angles obtenues avec le logiciel par éléments finis. L'illustration 7.26 est issue d'un calcul réalisé pour les campagnes d'essais présentées ci-dessus. On observe une variation de l'angle d'inclinaison de la bande entre l'initiation à deux bandes de localisation et le passage à une bande unique de localisation. Les valeurs relevées

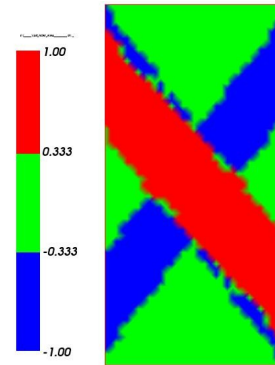


Illustration 7.26 : Carte d'isovaleurs de l'indicateur de plasticité  $M_2^m$  pour un essai biaxial à  $P_0 = 500 \text{ kPa}$  et  $P_{c0} = 8 \text{ MPa}$  pour  $U_y = 0,4 \text{ cm}$  avec le modèle HCC

sur l'image permettent d'établir une variation d'un angle d'inclinaison de 38 degrés à 43 degrés, valeurs comprises dans l'intervalle relevé par l'approche analytique. La valeur de l'angle d'inclinaison à 38 degrés est très proche de la valeur obtenue par l'approche de recherche de l'optimum (illustration 7.22a). La bande de cisaillement en charge sur l'illustration 7.26 n'est pas un résultat prédominant. Sur l'ensemble des études menées, le passage du mode de déformations de deux bandes à une bande de cisaillement donne aléatoirement une des deux bandes initiales.

En reprenant l'illustration 7.17, on peut à présent comparer les résultats analytiques à ceux obtenus par le logiciel par éléments finis sur un même graphique pour les trois campagnes d'essais (illustration 7.27). Les résultats obtenus sont très encourageants et montrent une concordance très probante de l'approche analytique avec l'approche par éléments finis. L'approche analytique a permis d'isoler une très grande partie des quantités intervenant dans la détermination des largeurs de bande de cisaillement.

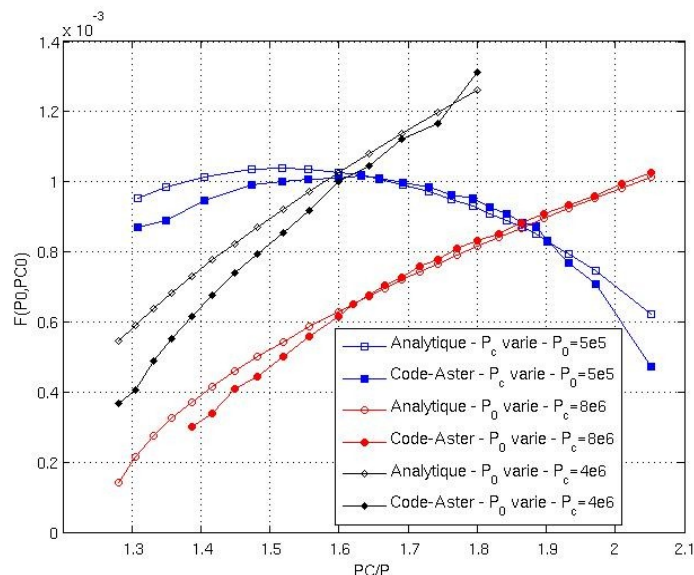


Illustration 7.27 : Évolution de la fonction  $F(P_0, P_{c0})$  en fonction de  $P_{c0}/P$  pour les approches analytique et par éléments finis avec le modèle HCC

Ce travail a permis de justifier les résultats numériques obtenus à partir d'un modèle analytique pour une grande variété de valeurs testées. Le couplage entre ce modèle de comportement (HCC) et le modèle de second gradient de dilatation peut donc être maîtrisé à partir d'un problème analytique pour ce chemin de chargement. De plus, il peut permettre de fixer une largeur de bande initiale cohérente avec la discrétisation spatiale utilisée dans la zone de sollicitations.

La prochaine étape de ce travail consiste à extrapoler ces résultats au modèle de comportement de Hujieux complet et à vérifier la concordance des résultats entre l'approche analytique et l'approche numérique par éléments finis.

#### 7.5.5.2 Extension des résultats aux autres modèles constitutifs

L'extension des résultats aux modèles de Hujieux nécessite de prendre en compte



l'écroûissage isotrope des surfaces de charge déviatoire des modèles. L'écroûissage a également un effet sur l'évolution de la déformation volumique plastique cumulée. Cette remarque s'applique à la fois pour les modèles HJS et Hujeux complet (§7.5.2). L'ensemble des résultats analytiques présentés dans ce paragraphe sont communs aux modèles HJS et Hujeux complet, sauf mention contraire.

La convergence numérique est relevée pour l'ensemble des calculs menés avec les modèles HJS et Hujeux à  $\eta_{tol} < 10^{-3}$  pour réduire les temps de calculs pour la réalisation des différentes simulations effectuées. On notera par la suite une perte de précision sur les grandeurs obtenues via ces simulations, mais très peu de variation sur les effets apportés par la prise en compte des milieux du second gradient de dilatation.

Pour ces modèles, la démarche menée précédemment (§7.5.5.1) n'est plus applicable directement dans son ensemble. Pour chaque incrément de contraintes verticales imposées, le seuil plastique du modèle doit être équilibré suivant les évolutions des variables internes. Pour chaque incrément, le tenseur de rigidité élasto-plastique est donc modifié. En se fixant une valeur pour la largeur de la zone d'influence pour les calculs par éléments finis (fixée pour l'exemple à  $l_c = 0,04m$ ), on obtient une évolution de la valeur du module élastique de rigidité du second gradient  $b_s$ .

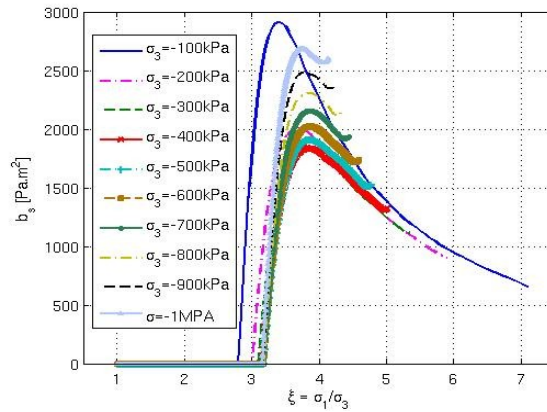


Illustration 7.28 : Évolution de  $b_s$  en fonction de  $\xi = \sigma_1/\sigma_3$  pour  $\sigma_3$  variant de  $-100 \text{ kPa}$  à  $-1 \text{ MPa}$  avec  $l_c = 0,04 \text{ m}$  pour le sable d'Hostun à  $DR = 88\%$  et le modèle HJS

L'évolution du module  $b_s$  est présentée sur l'illustration 7.28, pour une gamme de valeurs des contraintes latérales  $\sigma_3$  comprises entre  $-100 \text{ kPa}$  et  $-1 \text{ MPa}$ , en fonction du ratio  $\xi = \sigma_1/\sigma_3$ . Chaque courbe relative à un taux de confinement donné présente trois phases distinctes pour cet intervalle de valeurs. La première phase ne relève aucune direction matérielle instable ( $\xi < 2,5$ , cohérent avec les résultats établis au §7.5.3.2.2). Les valeurs du module  $b_s$  sont alors nulles. La seconde phase présente une évolution très rapide pour le module  $b_s$  marquée ensuite par un pic. La troisième phase correspond à la phase descendante de l'évolution du module  $b_s$  au fur et à mesure que le matériau se plastifie. La fin de la troisième étape correspond à un minimum local pour le module  $b_s$  (nommée « valeur palier » par la suite). Les dernières valeurs illustrées de  $b_s$  pour chaque contrainte latérale correspondent aux « demandes » du modèle avant la phase d'adoucissement du matériau.

En complément de l'illustration 7.28, l'évolution de  $b_s$  pour les différentes valeurs de  $\sigma_3$  est présentée en fonction du rapport  $P_c/P$  sur l'illustration 7.29. L'axe des abscisses est présenté sous une échelle logarithmique pour faciliter la lecture des résultats.

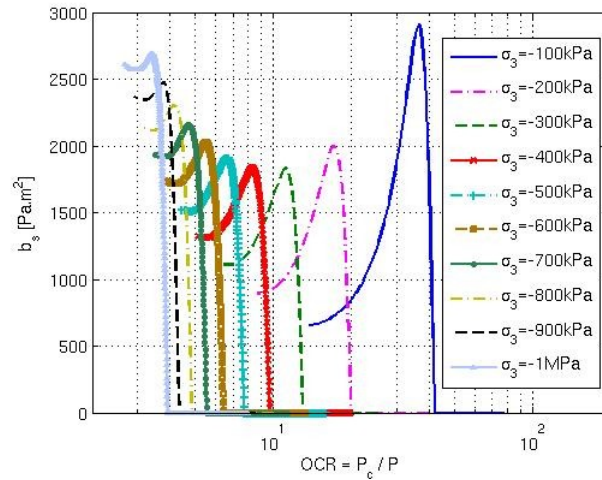


Illustration 7.29 : Évolution de  $b_s$  en fonction de  $P_c/P$  pour  $\sigma_3$  variant dans l'intervalle  $[-100 \text{ kPa}, -1 \text{ MPa}]$  avec  $l_c = 0,04 \text{ m}$  pour le sable d'Hostun à  $DR = 88\%$  et le modèle HJS

Il faut à présent s'intéresser à deux points distincts suite à ces résultats.

La première question est relative à l'évolution de  $b_s$  par rapport aux contraintes latérales appliquées,  $\sigma_3$ . La valeur maximale de  $b_s$  (valeur au pic) ne suit pas une évolution monotone en fonction de  $\sigma_3$ , à la différence des valeurs en fin de phase 3 qui suivent une évolution régulière et quasi-linéaire en fonction de  $\sigma_3$  (illustrations 7.30a et 7.30b). Les valeurs de  $b_s$  au pic correspondent à des niveaux de chargement où la direction axiale de compression n'est pas contenue dans le cône d'instabilités matérielles du modèle de Hujeux (résultats du §7.5.2.3), tandis que les valeurs de  $b_s$  en fin de phase 3 correspondent aux valeurs nécessaires pour contrôler l'adoucissement du matériau apparaissant en poursuivant le chemin de chargement de l'essai biaxial drainé.

On peut néanmoins remarquer que l'évolution de  $b_s$  avec le modèle de Hujeux est opposée à celle du modèle HCC pour de faibles valeurs du rapport  $P_c/P < 5$ . La valeur de  $b_s$  augmente alors que le matériau est de moins en moins dilatatant.

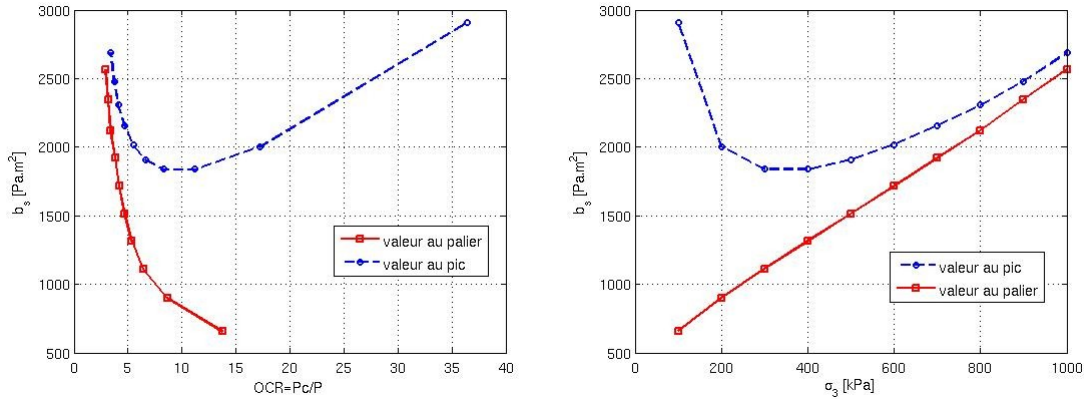


Illustration 7.30 : Évolution de  $b_s$  en fonction de  $P_c/P$  (gauche-a) et de  $\sigma_3$  (droite-b) pour le sable d'Hostun à  $DR=88\%$  pour le modèle HJS et  $l_c=0,04\text{ m}$

La seconde question porte sur l'extension de l'approche établie pour le modèle HCC au modèle complet de Hujeux. Il s'agit de savoir si l'évolution du module  $b_s$  pour le sable d'Hostun à  $DR=88\%$ , établie ci-dessus, est adaptée à celle relevée lors de modélisations par éléments finis d'essais biaxiaux drainés avec le modèle de Hujeux.

La première étape consiste à réaliser un essai biaxial drainé sur le sable d'Hostun à  $DR=88\%$  pour des contraintes latérales de  $\sigma_3=-500\text{ kPa}$  et  $\sigma_3=-1\text{ MPa}$ , valeurs contenues dans l'intervalle où l'évolution de  $b_s$  est quasi-linéaire pour les deux approches (illustration 7.30b). Les simulations numériques sont menées avec une discrétisation du chargement imposé  $dU_y=0,02\text{ mm}$ .

Les premières simulations menées avec  $\sigma_3=-500\text{ kPa}$  ont montré une zone d'influence plus étendue que celle attendue pour une valeur de  $b_s=1500\text{ Pa.m}^2$ , largement supérieure aux dimensions de la structure considérée ( $10 \times 20\text{ cm}$ ). Après plusieurs tentatives, la valeur de  $b_s$  permettant d'obtenir une largeur de bandes de  $l_c=0,04\text{ m}$  se situe à  $b_s=60\text{ Pa.m}^2$ , soit un facteur de réduction de 25 par rapport aux prédictions du modèle analytique (illustration 7.32 - gauche). Le modèle analytique ne prend pas en compte la dimension de couplage des différents mécanismes du modèle de Hujeux (deux autres mécanismes déviatoires  $M_1^m$  et

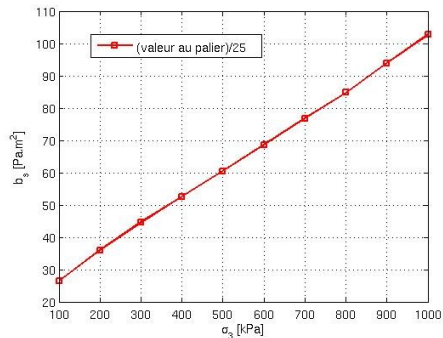


Illustration 7.31 : Évolution de  $b_s$  réduit en fonction de  $\sigma_3$  pour le sable d'Hostun à  $DR=88\%$  pour le modèle HJS et  $l_c=0,04\text{ m}$

$M_3^m$  plus le mécanisme isotrope), qui peut expliquer la différence quantitative entre les résultats analytiques et les résultats par éléments finis. Les aspects de couplage n'entraient pas en jeu pour le modèle HCC, puisqu'un seul mécanisme plastique était sollicité durant les essais (les autres mécanismes restant élastiques sur ce chemin de chargement).

Le facteur de réduction calculé a ensuite été testé pour une valeur  $\sigma_3 = -1 \text{ MPa}$ , soit  $b_s = 100 \text{ Pa.m}^2$  (illustration 7.31). Les résultats sont très satisfaisants et présentés sur l'illustration 7.32. La largeur d'influence  $l_c = 0,04 \text{ m}$  est considérée acquise si on se réfère aux résultats obtenus pour l'indicateur de plasticité (7.32b).

La dépendance linéaire de  $b_s$  par rapport à  $\sigma_3$  a bien été établie dans l'intervalle  $-1 \text{ MPa} \leq \sigma_3 \leq -500 \text{ kPa}$  pour les calculs par éléments finis.

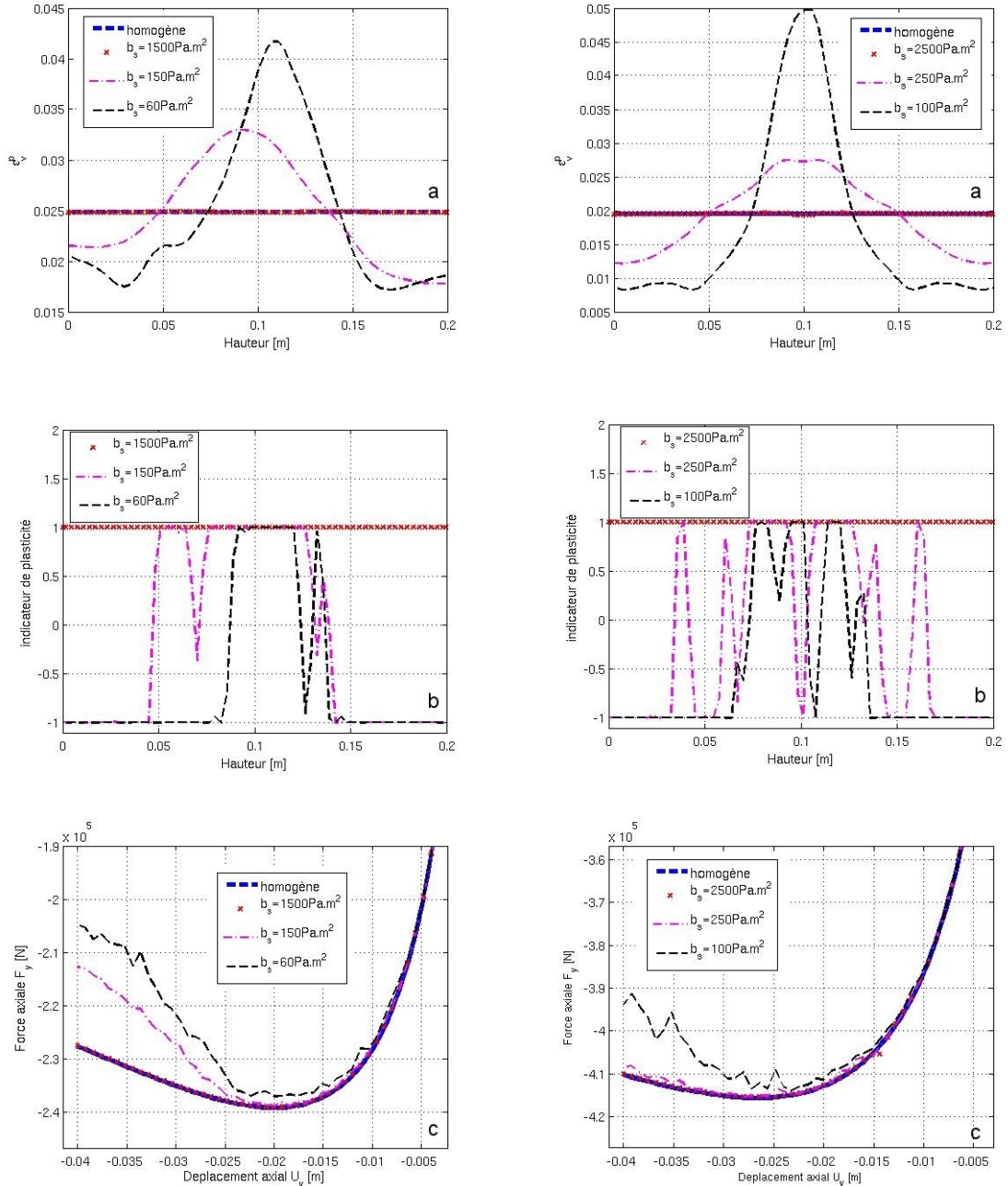


Illustration 7.32 : Coupe verticale dans l'échantillon pour  $\sigma_3 = -500 \text{ kPa}$  à  $U_y = -0,028 \text{ m}$  (gauche) et  $\sigma_3 = -1 \text{ MPa}$  à  $U_y = -0,04 \text{ m}$  (droite) représentant  $\epsilon_v^p$  ; b) indicateur de plasticité  $M_2^m$  ; c)  $F_y$  en fonction de  $U_y$ .

L'orientation des bandes de cisaillement calculée analytiquement est également en bon accord avec celle relevée lors des simulations par éléments finis. Pour  $\sigma_3 = -1 \text{ MPa}$ , l'angle relevé lors des simulations est proche de  $\theta_{11} = 43$  degrés (illustration 7.33) et l'approche analytique fournit un angle minimum  $\theta_{11} = 39$  degrés contenu dans l'intervalle  $28 < \theta_{11} < 45$  degrés (illustration 7.33). Les indices sous l'angle d'inclinaison (ex  $\theta_{11}$ ) indiquent que la direction initiale  $\theta_{11} = 0$  degrés est portée par la direction 1 (verticale dans cet exemple).

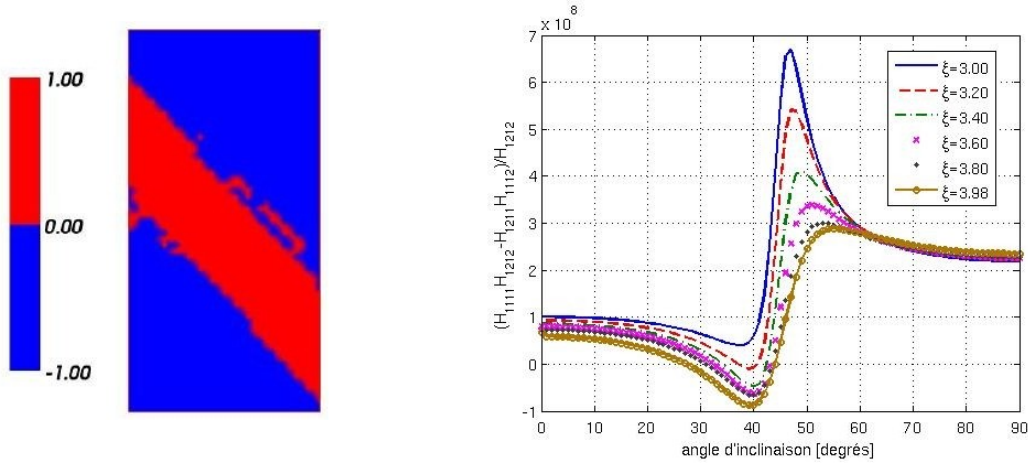


Illustration 7.33 : (gauche-a) Indicateur de plasticité  $M_2^m$  pour  $\sigma_3 = -1 \text{ MPa}$ ,  $b_s = 100 \text{ Pa.m}^2$  et  $U_y = 0,016 \text{ m}$  pour le modèle HJS ; (droite-b) Évolution de  $\omega_{th}$  (équation 7.29) en fonction de l'inclinaison de la bande de cisaillement

La suite des essais consiste à vérifier si  $b_s$  suit une évolution linéaire entre les valeurs de contraintes latérales  $-500 \text{ kPa} \leq \sigma_3 \leq -100 \text{ kPa}$ , ou bien si l'évolution de  $b_s$  nécessaire pour obtenir  $l_c = 0,04 \text{ m}$  correspond aux résultats liés au pic de  $b_s$  (illustration 7.30). La simulation réalisée montre une largeur de bande de l'ordre de  $l_c \approx 0,07 \text{ m}$  pour  $b_s = 25 \text{ Pa.m}^2$  et  $\sigma_3 = -100 \text{ kPa}$  (illustration 7.34). Ce résultat confirme une variation monotone de  $b_s$  en fonction de  $\sigma_3$  sur l'intervalle d'étude  $\sigma_3 \in [-1000, -100] \text{ kPa}$ . La valeur de  $b_s$  contrôlant la largeur de la bande peut donc être choisie au point où  $d^2 W = 0$  pour le trajet de chargement de l'essai biaxial drainé. L'évolution monotone obtenue via les simulations numériques est en désaccord avec l'évolution des valeurs de  $b_s$  relevées au pic (illustration 7.30).



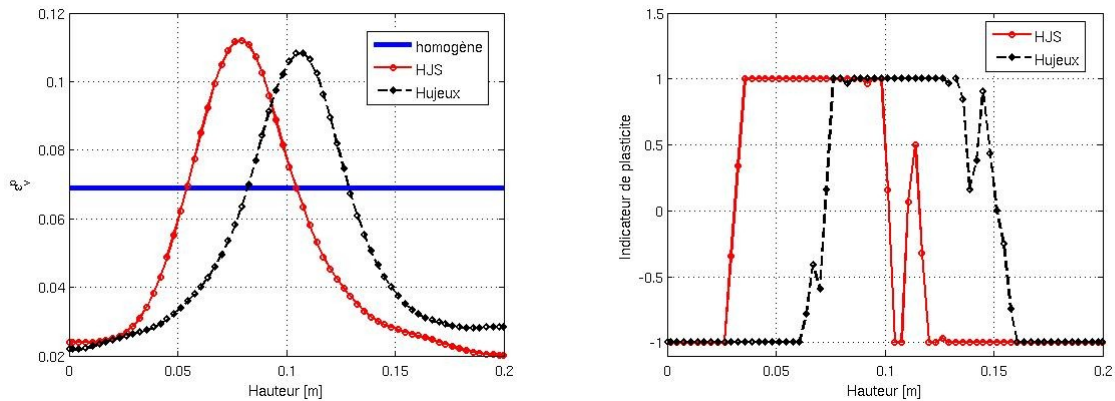


Illustration 7.34 : Coupe axiale centrale représentant  $\epsilon_v^p$  (gauche) et l'indicateur de plasticité  $M_2^m$  (droite) pour les modèles HJS et Hujeux pour  $\sigma_3 = -100 \text{ kPa}$  ;  $U_y = -0,016 \text{ m}$  et  $b_s = 25 \text{ Pa.m}^2$

Ces résultats ont été établis avec le modèle HJS. Les mêmes études sont à présent menées pour le modèle de Hujeux complet et donnent des résultats similaires à ceux du modèle HJS (illustration 7.34).

Pour ce jeu de paramètres et ce chemin de chargement, l'influence des mécanismes isotropes est négligeable sur les déformations volumiques et la valeur maximale du déviateur de contraintes comme précisé précédemment §7.5.3.2.2 (illustrations 7.5, 7.6). L'illustration 7.35 permet également de confirmer l'effet mineur de la prise en compte du mécanisme plastique isotrope pour ce jeu de paramètres sur la réponse globale de l'échantillon dans le plan  $(U_y, F_y)$ .

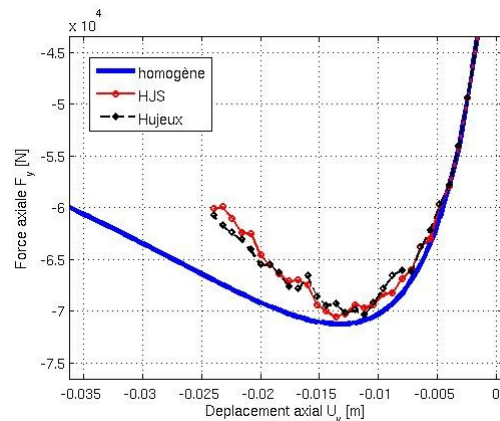


Illustration 7.35 : Évolution de la force axiale  $F_y$  en tête de l'échantillon pour  $\sigma_3 = -100 \text{ kPa}$  et  $b_s = 25 \text{ Pa.m}^2$  pour les modèles HJS et Hujeux

Les résultats établis ci-dessus doivent également être étendus à d'autres jeux de paramètres pour déterminer si la valeur 25 pour le facteur de réduction est indépendante des propriétés matériaux.

Le matériau suivant testé est également un sable d'Hostun à  $DR = 40\%$ .

La procédure mise en place pour le sable d'Hostun à  $DR = 88\%$  est à présent appliquée au sable d'Hostun à  $DR = 40\%$ . Les conclusions de ce travail présentées en annexe 9.13 montrent une dépendance du facteur de réduction en fonction des propriétés matériaux choisies. Ce jeu de paramètres montre également des différences entre les modèles HJS et Hujeux sur le chemin biaxial drainé qui se répercutent sur la valeur du coefficient de réduction à appliquer. Les valeurs du coefficient de réduction sont finalement égales respectivement à 50 et 100 pour les modèles HJS et de Hujeux complet.

### 7.5.5.3 Retour sur la procédure mise en place

L'objet de cette section consistait à confronter l'approche analytique d'une couche de sol cisailée aux simulations numériques modélisant un essai biaxial drainé pour déterminer l'évolution des valeurs de  $b_s$  en fonction des états de contraintes et propriétés matériaux. Cette approche a tout d'abord été réalisée pour le modèle HCC puis étendue aux modèles HJS et de Hujeux complet.

Les résultats pour le modèle HCC ont montré une très bonne corrélation entre les résultats analytiques et numériques pour la détermination de la zone d'influence spatiale  $l_c$ , liée à l'ajout des termes de second gradient de dilatation.

Pour les modèles HJS et de Hujeux complet, les résultats sont apparus cohérents à l'approche analytique à un facteur de réduction près lié aux écoulements plastiques produits par les autres mécanismes du modèle. La valeur du facteur de réduction est aujourd'hui établie par essais-erreurs pour les paramètres matériau testés. Les valeurs fournies par l'approche analytique constituent pour le modèle de Hujeux une valeur supérieure, qui suivent une évolution identique à celles relevées lors des simulations numériques.

La procédure suivie pour établir les valeurs du module de rigidité  $b_s$  en fonction de la valeur cible  $l_c$  consiste à :

- réaliser l'intégration numérique du modèle de Hujeux le long du chemin de chargement homogène de l'essai biaxial drainé ;
- pour tous les niveaux de chargement, appliquer une rotation complète des composantes du tenseur des contraintes dans le but de construire l'opérateur tangent continu en fonction de ces nouvelles composantes ;
- établir les directions potentielles d'apparition de bandes de cisaillement au regard des solutions du problème en vitesse analytique présenté au §7.4.1 ;
- extraire la valeur du module de rigidité  $b_s$  équivalent à la valeur de  $l_c$  fixée,  $b_s = (l_c / F(P_0, P_{c0}))^2$  ;
- le facteur de réduction est obtenu par essais-erreurs, sachant que  $l_c$  est fonction de  $\sqrt{b_s}$ .

Les sections suivantes démontrent que la prise en compte des milieux de second gradient de dilatation permet de travailler avec un outil de modélisation indépendant de la discrétisation spatio-temporelle pour des modèles de comportement produisant une déformation volumique.

### 7.5.6 Indépendance des résultats aux maillages

Les simulations réalisées précédemment (§7.5.5) pour cet essai biaxial drainé ont permis de démontrer que le modèle analytique de la couche de sol cisailée proposé par Chambon et al. (2001) permettait de contrôler la zone régularisée d'une couche de sol modélisée avec le modèle de Hujeux. Cette approche théorique a montré des résultats très convaincants en fonction des propriétés matériaux et des états de contraintes initiales pour l'application à un essai biaxial drainé. Ce paragraphe s'intéresse à présent à regarder l'indépendance des résultats aux maillages.

L'indépendance des résultats aux maillages est contrôlée suivant plusieurs critères, dont le comportement global de la structure (regard porté sur la courbe force/déplacement en tête de l'échantillon), l'état de la déformation volumique plastique dans la structure et des indicateurs de plasticité.

Pour une géométrie donnée présentée à l'illustration 7.3, trois maillages ont été considérés et sont présentés sur l'illustration 7.36. Les deux premiers maillages sont réguliers et composés de quadrilatères (512 QUAD8 et 2048 QUAD8). Le troisième maillage, le plus fin, est composé de triangles, dans son ensemble, sauf sur la zone endommagée (6588 TRIA6 et 64 QUAD8). Cette zone, définie par des propriétés matériaux différentes (réduction de 5% de  $P_{c0}$ ), est à dimension constante pour les trois maillages étudiés.

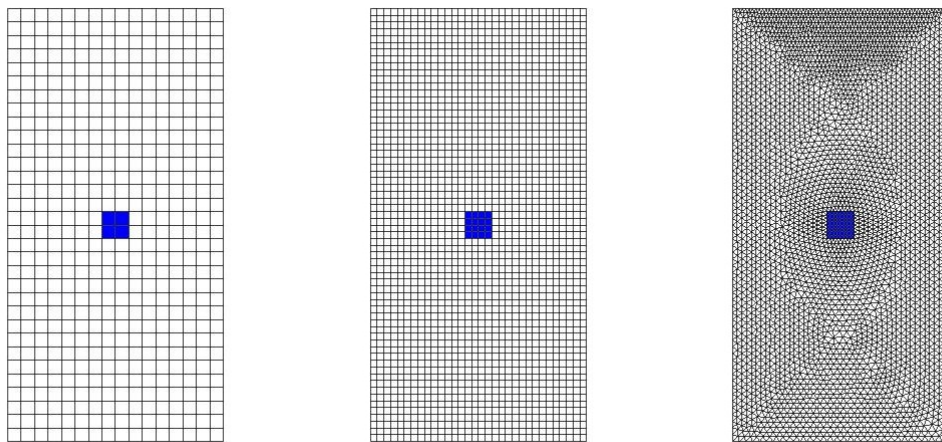


Illustration 7.36 : Maillages utilisés pour la modélisation d'un essai biaxial : a) gauche 3266 ddls - M512 ; b) centre 12674 ddls - M2048 ; c) droite 27186 ddls - MALEA

Les modélisations sont menées sur des éléments quadratiques avec intégration sélective pour les maillages réguliers composés exclusivement de QUAD8 (modélisation D\_PLAN\_SI de Code\_Aster). La modélisation réalisée avec le maillage le plus fin est réalisée suivant une intégration normale (D\_PLAN) due à la présence d'éléments triangulaires. Les simulations numériques sont menées avec une discrétisation du chargement imposé  $dU_y = 0,02 \text{ mm}$ .

Les résultats obtenus pour une pression de confinement initiale de  $\sigma_3 = 300 \text{ kPa}$ , avec une valeur de  $b_s = 45 \text{ Pa.m}^2$ , avec le modèle HJS pour le sable d'Hostun à  $DR = 88\%$ , sont présentés sur les illustrations 7.37 et 7.38. L'indépendance des résultats est retrouvée pour la courbe du comportement global de la structure, ainsi que pour les déformations volumiques plastiques.

Les résultats relatifs au comportement global sont identiques pour les trois maillages utilisés. Ils restent indépendants des maillages utilisés sur toute la gamme de chargement, même dans la partie adoucissante du comportement (illustration 7.37a).



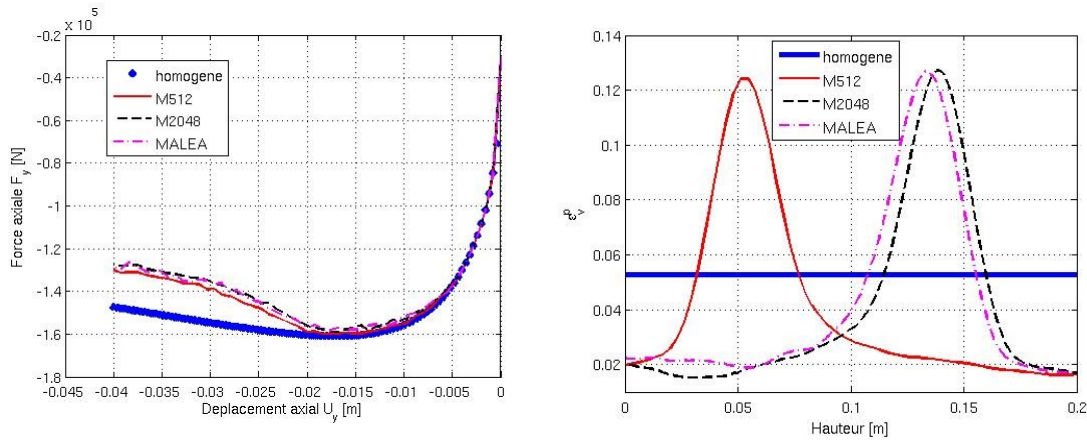


Illustration 7.37 : (gauche – a) Réponse globale dans le plan force déplacement de l'échantillon et (droite – b) Profil de  $\epsilon_v^p$  fonction de la hauteur pour un essai biaxial drainé sur sable d'Hostun à  $DR=88\%$  ,  $\sigma_3=300 \text{ kPa}$  ,  $U_y=4 \text{ cm}$  et  $b_s=45 \text{ Pa.m}^2$

L'utilisation d'une cinématique enrichie doit également assurer une indépendance des résultats à l'échelle locale de la structure. Les illustrations 7.37b et 7.38 présentent la répartition des indicateurs de plasticité et de la déformation volumique plastique pour les différents maillages. Les largeurs de bandes apparaissent constantes en fonction des maillages ainsi que l'amplitude des valeurs de  $\epsilon_v^p$  (illustration 7.37b), avec néanmoins une différence sensible sur le maillage intermédiaire à 2048 éléments. La prise en compte de la cinématique enrichie type second gradient de dilatation ne restaure pas l'unicité des solutions du problème posé, mais assure de contrôler l'énergie dissipée durant la phase de « post-localisation » de la structure et une largeur de bande indépendante de la discrétisation spatiale. Différents profils de rupture sont apparus au cours des simulations réalisées.

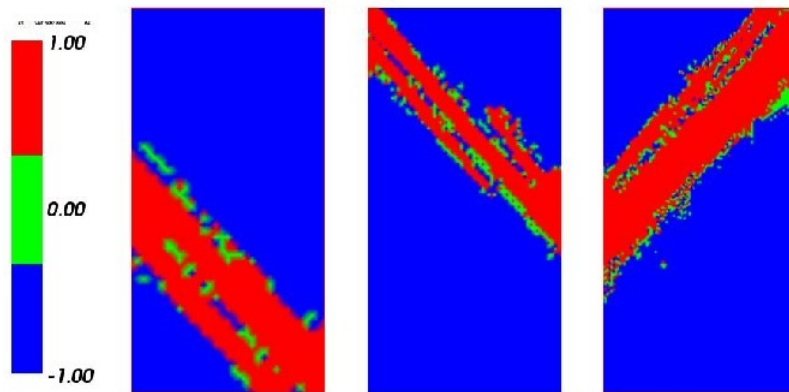


Illustration 7.38 : Indicateur de plasticité  $M_2^m$  après  $U_y=3,2 \text{ cm}$  lors d'un essai biaxial drainé sur sable d'Hostun à  $DR=88\%$  ,  $\sigma_3=300 \text{ kPa}$  et  $b_s=45 \text{ Pa.m}^2$  sur les trois maillages

L'ensemble des profils de simulation sont également retrouvés expérimentalement par Desrues et Viggiani (2004) pour des essais biaxiaux drainés avec un élanement de l'échantillon égal à 2.

### 7.5.7 Influence de la discrétisation du chargement sur les résultats

Les résultats présentés dans cette section sont tous établis sur le maillage M512 (illustration 7.36a). Le paramètre variant entre les différentes simulations est le pas de chargement appliqué. L'ensemble des essais réalisés se distinguent selon les deux variantes du modèle de Hujeux utilisées. Les premières simulations ont été menées sur le modèle HCC et les secondes sur le modèle HJS. Les paramètres matériaux utilisés sont ceux qui ont été présentés dans le tableau 7.1.

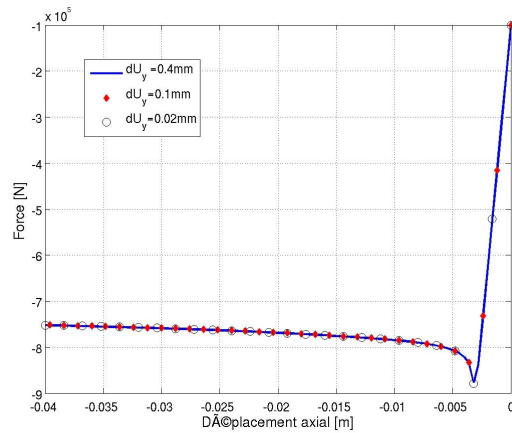


Illustration 7.39 : Réponse globale d'un essai biaxial pour  $\sigma_3 = 1 \text{ MPa}$  et

$b_s = 5400 \text{ Pa.m}^2$  - Indépendance de la solution par rapport au pas de chargement dans sa partie adoucissante

Les simulations menées avec le modèle HCC se différencient selon trois pas de chargement. Les incréments de déplacement axial imposés à chaque pas de chargement prennent les valeurs de  $dU_y = [0,4 \text{ mm} ; 0,1 \text{ mm} ; 0,02 \text{ mm}]$ . Les réponses représentatives du comportement global de ces simulations sont similaires tant pour les zones maintenues en charge durant la phase d'adoucissement (illustration 7.40, la valeur 1 indiquant que le mécanisme déviatoire est en charge) que la force relevée en tête de l'échantillon (illustration 7.39).

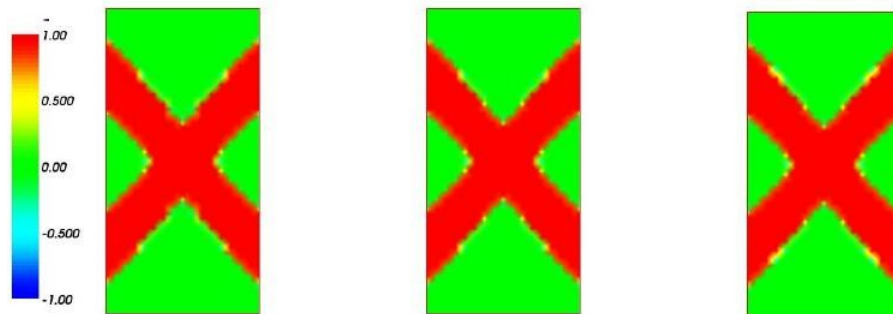


Illustration 7.40 : Indicateur de plasticité  $M_2^m$  après  $U_y = 3,2 \text{ mm}$  de déplacement imposé : a)(gauche)  $dU_y = 0,4 \text{ mm}$  ; b)(centre)  $dU_y = 0,1 \text{ mm}$  ; c)(droite)  $dU_y = 0,02 \text{ mm}$ , avec  $\sigma_3 = 1 \text{ MPa}$  et  $b_s = 5400 \text{ Pa.m}^2$  pour le modèle HCC

Les réponses en tête d'échantillon, obtenues avec le modèle HJS, pour trois niveaux de discrétisation de chargement différents  $dU_y = [0,08 \text{ mm} ; 0,04 \text{ mm} ; 0,02 \text{ mm}]$ , sont présentées sur l'illustration 7.41 et apparaissent quasi-identiques dans le plan force-déplacement. Pour la déformation volumique plastique, les résultats sont équivalents en valeurs dans les bandes de cisaillement. Ces bandes ont néanmoins une position différente dans l'échantillon en fonction de la discrétisation du chargement appliqué.

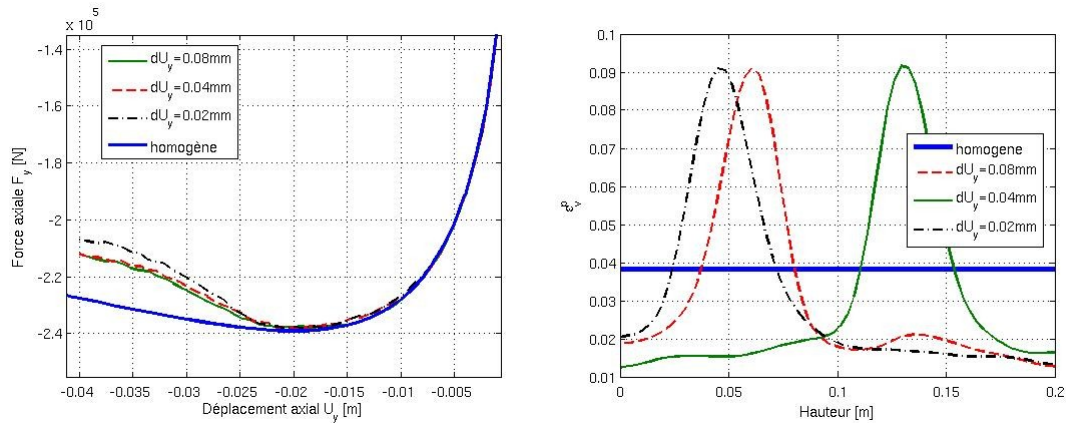


Illustration 7.41 : (gauche -a) Réponse en force-déplacement d'un essai biaxial et (droite – b) Profil de  $\epsilon_v^p$  fonction de la hauteur pour  $\sigma_3 = 500$  kPa et  $b_s = 60$  Pa.m<sup>2</sup> pour différentes valeurs de discrétisation de chargement et le modèle HJS

Les trois réponses s'éloignent de la réponse homogène de la structure avant d'atteindre le pic de contraintes et la force axiale appliquée en tête de l'échantillon chute brutalement pour une valeur du paramètre de contrôle identique selon les trois discrétisations. En revanche, les modes de ruine associés à ces trois niveaux de discrétisation « temporelle » sont différents (illustrations 7.41b et 7.42). Les largeurs de bandes de cisaillement restent néanmoins constantes et assurent une indépendance « spatio-temporelle » des résultats de simulations. On peut alors distinguer deux modes de ruine symétriques et un mode supplémentaire, insensible à la présence de l'imperfection locale introduite au centre de l'échantillon.

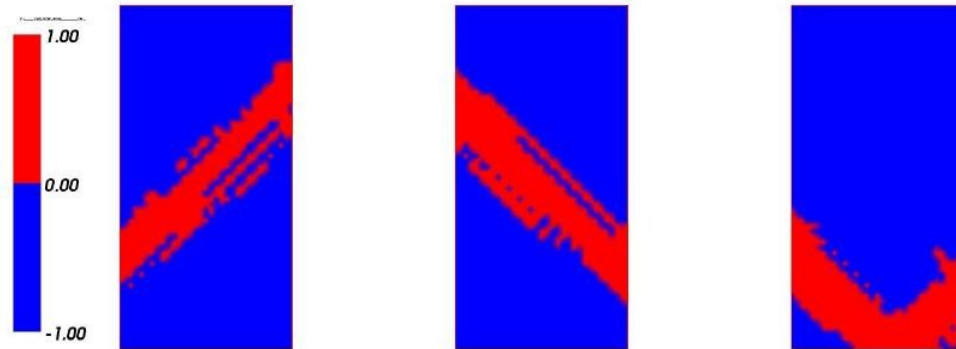


Illustration 7.42 : Indicateur de plasticité  $M_2^m$  après  $U_y = 4$  cm de déplacement imposé pour le modèle HJS : a)(gauche)  $dU_y = 0,08$  mm ; b)(centre)  $dU_y = 0,04$  mm ; c) (droite)  $dU_y = 0,02$  mm pour  $\sigma_3 = 500$  kPa et  $b_s = 60$  Pa.m<sup>2</sup>

### 7.5.8 Évolution de la largeur des bandes de cisaillement au cours du chargement

Les résultats établis précédemment ont permis de démontrer que l'utilisation de la méthode de second gradient de dilatation est adaptée pour traiter le problème de dépendance pathologique des résultats au maillage utilisé avec le modèle de Hujeux. Ce paragraphe s'intéresse à caractériser l'évolution de la zone influencée par la méthode de second gradient de dilatation, pour le sable d'Hostun à  $DR=88\%$ ,  $\sigma_3=300\text{ kPa}$  et  $b_s=45\text{ Pa.m}^2$ .

L'essai biaxial drainé est réalisé sur le maillage M512 (illustration 7.36a) pour une discrétisation du chargement imposé égale à  $dU_y=0,02\text{ mm}$ .

L'illustration 7.44 présente pour sept niveaux de chargement différents,

$U_y=[1,2; 2,0; 2,4; 3,2; 4,0; 6,4; 8,0]\text{ cm}$  (carrés rouges sur l'illustration 7.43), l'évolution de la déformation volumique plastique cumulée le long d'une coupe axiale verticale de l'échantillon. La zone d'influence atteint une largeur maximale sur l'échantillon qui se stabilise pour la suite du chargement. On remarque également que la déformation volumique plastique atteint une valeur limite correspondant à l'état critique du matériau. L'évolution de  $\epsilon_v^p$  indique de plus qu'il ne subsiste qu'une seule zone en charge plastique, puisque qu'après le niveau de chargement  $U_y=2\text{ cm}$ , les évolutions plastiques sont nulles en dehors de la bande de cisaillement.

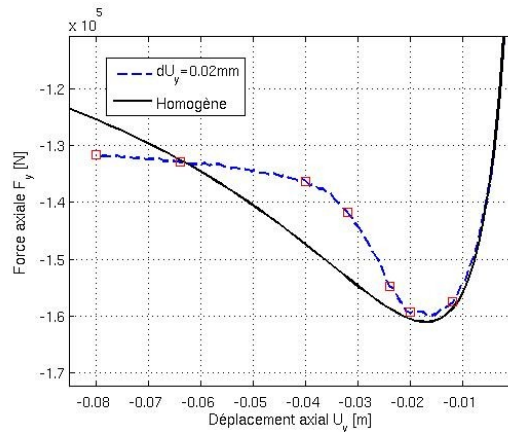


Illustration 7.43 : Force de réaction en tête de l'échantillon au cours d'un essai biaxial sur sable d'Hostun à  $DR=88\%$  avec  $\sigma_3=300\text{ kPa}$  et  $b_s=45\text{ Pa.m}^2$  pour le modèle HJS

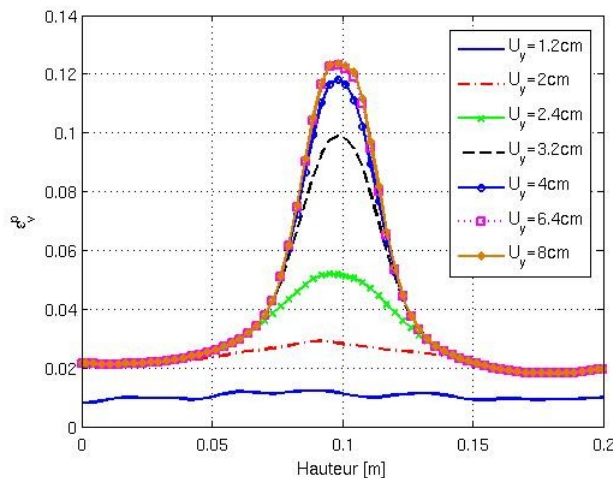


Illustration 7.44 : Coupe verticale centrale de la déformation volumique plastique cumulée  $\epsilon_v^p$  pour un sable d'Hostun à  $DR=88\%$ ,  $\sigma_3=300\text{ kPa}$  et  $b_s=45\text{ Pa.m}^2$  pour le modèle HJS

L'étude de l'indicateur de plasticité locale permet également d'apprécier les zones en chargement plastiques des zones en décharge (illustration 7.45). On constate tout d'abord le rapprochement de deux bandes plastiques qui fusionnent en une zone unique en charge plastique dans l'échantillon. La largeur de la bande cisailée maintenue en chargement augmente au cours de l'essai biaxial durant la phase d'adoucissement jusqu'à une largeur maximale (illustration 7.45). Cette visualisation confirme les résultats observés sur l'illustration 7.44, où les déformations volumiques plastiques se concentrent dans une zone à largeur constante.

L'orientation de la bande de cisaillement évolue au cours du chargement passant d'un angle  $\theta_{11}$  initial de 38,7 degrés, puis 43,4 degrés et enfin 46,2 degrés sur la gamme de valeurs simulées (valeurs relevées sur l'illustration 7.45).

Pour l'ensemble des calculs menés à différents taux de confinement, le maintien de cette bande de cisaillement en charge dans l'échantillon durant l'intégralité du chargement ne représente qu'une solution parmi d'autres. Certains calculs ont également montré la prédominance de la bande symétrique à celle observée dans ce calcul, par exemple (présentée au §7.5.6).

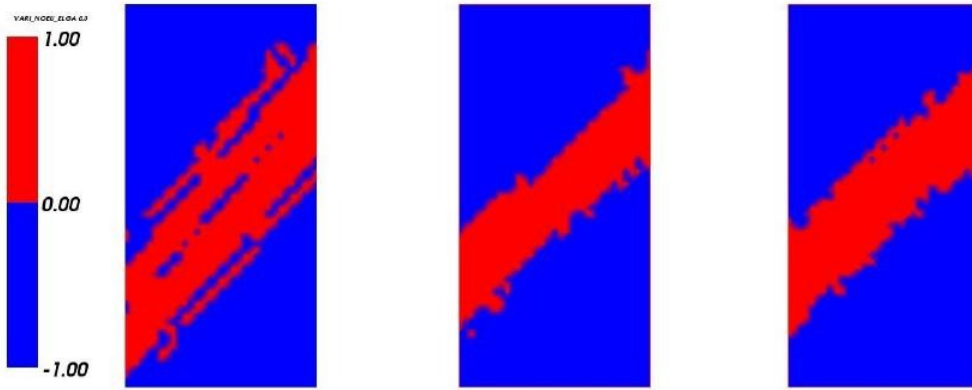


Illustration 7.45 : Isovaleurs de l'indicateur de plasticité  $M_2^m$  pour  $U_y=2,4$  cm (gauche-a),  $U_y=4,8$  cm (centre-b) et  $U_y=8,0$  cm (droite-c) pour un sable d'Hostun à  $DR=88\%$ ,  $\sigma_3=300$  kPa et  $b_s=45$  Pa.m<sup>2</sup> pour le modèle HJS

### 7.5.9 Répartition des énergies internes

Les résultats présentés dans cette section, issus de simulations réalisées avec un maillage identique (M512, illustration 7.36a), permettent de quantifier l'énergie de déformation des milieux du second gradient de dilatation relevée dans la structure pour un couplage avec le modèle de Hujeux. Cette énergie est calculée numériquement de façon analogue à l'énergie dissipée thermiquement pour un champ de températures. L'expression de cette énergie prend la forme suivante :

$$\mathcal{W}_{micro} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left( \int_{\Omega} \nabla \epsilon_v \cdot B \cdot \nabla \dot{\epsilon}_v d\Omega \right) dt \quad (7.46)$$

avec  $B$  le tenseur de rigidité linéaire local défini en 7.16 reliant le tenseur des doubles forces  $S$  au gradient des déformations volumiques  $\nabla \epsilon_v$ .

L'énergie interne créée par la partie second gradient contribue à assurer une



dissipation d'énergie interne lors de l'apparition de bandes de cisaillement générant des déformations volumiques et conduisant la structure complète à sa ruine.

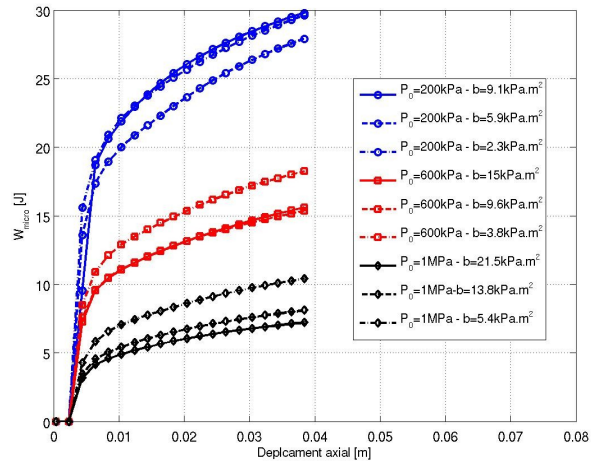
Les essais réalisés ont été effectués à des taux de confinement initiaux différents, soit  $\sigma_3 = [200 \text{ kPa}, 600 \text{ kPa}, 1 \text{ MPa}]$  pour les propriétés matériaux du modèle HCC (cf tableau 7.1) pour un écrasement axial maximum de  $U_y = 4 \text{ cm}$  en tête d'échantillon. L'énergie de déformation obtenue est normalisée par la valeur du travail extérieur  $\mathcal{W}_{ext}$  (équation 7.47). Les valeurs du tenseur de rigidité linéaire du modèle de second gradient de dilatation ont été calculées à partir de la procédure mise en place au §7.5.5.1 pour des largeurs de bandes de cisaillement égales à  $l_c = [0,05 \text{ m}; 0,08 \text{ m}; 0,1 \text{ m}]$ . Les valeurs obtenues pour les différents modules de rigidité  $b_s$  sont reportées dans le tableau 7.3.

$$\mathcal{W}_{ext} = \int_{t_0}^t F_{ext} \dot{U} dt \quad (7.47)$$

$b_s$	$\sigma_3 = 200 \text{ kPa}$	$\sigma_3 = 600 \text{ kPa}$	$\sigma_3 = 1 \text{ MPa}$
$l_c = 0,05 \text{ m}$	2300	3800	5400
$l_c = 0,08 \text{ m}$	5900	9600	13800
$l_c = 0,10 \text{ m}$	9100	15000	21500

**Tableau 7.3 : Valeurs de  $b_s$  (en  $\text{Pa.m}^2$ ) obtenues à partir de la procédure détaillée au §7.5.5**

Les résultats présentés sur l'illustration 7.46 permettent de visualiser et quantifier l'énergie dissipée par les termes du second gradient de dilatation. L'énergie est nulle durant la phase de chargement élastique. Cette énergie suit ensuite une évolution monotone et tend vers une valeur limite finie. L'énergie dissipée est relativement stable et constante pour les différentes valeurs de  $b_s$  choisies pour une pression de confinement initiale fixée.



**Illustration 7.46 : Énergie de déformation des milieux de second gradient de dilatation exprimée en Joule [J] pour le modèle HCC**

Sur l'illustration 7.47, on constate que l'énergie relative à la partie de second gradient normée par  $\mathcal{W}_{ext}$  est non négligeable mais faible, inférieure au % pour les exemples présentés. Pour l'ensemble des résultats, le terme  $\mathcal{W}_{micro}/\mathcal{W}_{ext}$  est nul durant la phase élastique de comportement du matériau. L'entrée en plasticité

du matériau coïncide avec une augmentation rapide du ratio des énergies pour ensuite diminuer vers une valeur résiduelle. Le pic relatif de  $\mathcal{W}_{micro}/\mathcal{W}_{ext}$  au cours des essais correspond au passage du mode de déformation homogène au mode de déformation bifurqué avec apparition d'une bande de cisaillement (rapport maximal inférieur à 1 %). La diminution du rapport  $\mathcal{W}_{micro}/\mathcal{W}_{ext}$  s'explique notamment par le concept d'état critique intégré dans le modèle de Hujeux, surtout sous sa forme HCC. Le concept d'état critique introduit deux phénomènes compétitifs. Le premier phénomène joue sur le tenseur élasto-plastique  $H^{ep}$  relié à l'écrouissage du matériau ( $h \rightarrow 0$ ), avec pour conséquence un élargissement de la zone d'influence du second gradient  $l_c$ . Le second phénomène relatif à cet état conduit à une variation volumique nulle. Le terme régularisé se stabilise dans l'équation d'équilibre du système. Ce second aspect se retrouve sur l'illustration 7.47 où l'énergie interne produite par les termes de second gradient de dilatation devient négligeable devant l'énergie apportée par l'extérieur, lorsque le plateau de plasticité parfaite est atteint (valeur inférieure à 1‰).

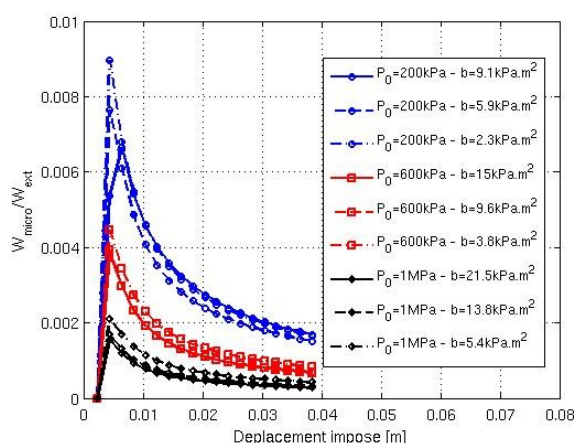


Illustration 7.47 : Énergies de déformation des milieux de second gradient de dilatation  $\mathcal{W}_{micro}$  normalisé par la valeur du travail extérieur  $\mathcal{W}_{ext}$  pour le modèle HCC

### 7.5.10 Bilan et perspectives suite à la modélisation des essais biaxiaux drainés

L'objectif de cette section était de définir pour le modèle élastoplastique de Hujeux une procédure permettant d'obtenir des résultats objectifs par rapport à la discrétisation spatiale en utilisant le modèle de second gradient de dilatation en vue d'applications numériques industrielles sur des ouvrages géotechniques. L'utilisation du modèle de second gradient en complément du modèle de Hujeux a montré qu'elle est une solution performante pour réaliser des études de stabilité sur des essais biaxiaux drainés.

Le premier avantage de cette solution assure d'introduire un minimum d'inconnues nodales supplémentaires à résoudre pour assurer l'objectivité des résultats au maillage, au final consistant à ajouter une unique inconnue nodale.

Le modèle de second gradient de dilatation appliqué dans le cadre de cette thèse aux matériaux dilatants a démontré sa capacité à régulariser les zones de localisation. L'utilisation du modèle analytique d'une couche de sol cisailée nous a

par ailleurs permis de maîtriser l'évolution de la zone de localisation en fonction des paramètres matériaux et des états de contraintes initiaux. La grande variété d'états de contraintes initiaux des échantillons et de paramètres matériaux testés assurent un caractère général à ces conclusions. Les résultats numériques présentés ont également permis de quantifier l'énergie dissipée par la prise en compte des termes du second gradient de dilatation. Le rapport d'énergie entre les termes du second et du premier gradient des déplacements est relativement faible et tend à diminuer au fur et à mesure que l'état du matériau contenu dans les bandes de cisaillement tend vers l'état critique du matériau.

Néanmoins, la procédure analytique mise en place pour aider à la détermination de la valeur du module de rigidité  $b_s$  se restreint au chemin de chargement suivi lors d'un essai biaxial. L'extension de la procédure, mise en place détaillée au §7.5.5.3, doit être étendue à tout type de chemins de chargement.

La procédure étendue pourrait prendre place après un premier calcul non linéaire de la structure étudiée sur un maillage relativement grossier. L'expérience accumulée sur l'utilisation de ces modèles nous permet d'envisager de prendre en compte uniquement les valeurs du module  $b_s$  établies aux points matériels connaissant localement un chargement adoucissant (travail du second ordre négatif).

La section suivante présente un cas d'excavation de talus suivi d'un chargement de fondation superficielle en tête de talus. Les valeurs utilisées pour le module de rigidité  $b_s$  dans le sol seront pour cette étude encore restreintes à l'approche établie pour les essais biaxiaux drainés. Cet exemple permettra d'estimer les apports de la régularisation de type second gradient de dilatation sur une structure relativement commune en géotechnique tout en gardant à l'esprit que les valeurs établies pour  $b_s$  ne sont pas optimisées par rapport au chemin de chargement suivi dans la structure.



## 7.6 Étude de stabilité d'un déblai

### 7.6.1 Motivation

Cette section s'intéresse au cas d'étude d'un déblai, mené par Hamadi (2006) dans le cadre de sa thèse, suivi d'un chargement de fondation superficielle en tête de talus. Dans le cadre de son travail, il a essentiellement regardé pour ce cas d'étude constitué de sable lâche, si la condition de Hill permettait de détecter la rupture diffuse du talus durant la phase d'excavation. La pente du talus étant trop faible en comparaison de l'angle de frottement du matériau, la déstabilisation du talus est peu significative, malgré la présence de l'eau en pied de talus. Le travail mené ici reprend ce cas d'étude suivi d'un chargement de fondation superficielle en tête de talus pour déstabiliser complètement la pente par apparition d'une bande de cisaillement circulaire dans le talus. La première phase consiste à mettre en avant la dépendance pathologique des résultats à la discrétisation spatiale utilisée (c'est à dire le maillage) pour ensuite appliquer la méthode de second gradient de dilatation au domaine.

### 7.6.2 Présentation du problème aux limites et ses conditions initiales

La géométrie et les conditions aux limites du problème d'excavation sont présentées sur l'illustration 7.48. Le problème aux limites étudié est un talus d'une hauteur de 2 m avec une pente de 27 degrés. L'excavation est réalisée par enlèvement successif de couches de sol de 0,5 m. Le sol est modélisé avec le modèle élasto-plastique de Hujieux. Le massif de sol est lui-même constitué de deux couches de sable distinctes : en partie profonde ( [0–6] m ), un sable d'Hostun dense à  $DR=88\%$  et en surface ( [6–10] m ), un sable d'Hostun moyennement dense à  $DR=40\%$ . Les paramètres matériaux relatifs à ces deux couches de sol sont présentés dans les tableaux 7.1 et 9.7. Les contraintes initiales du massif sont établies en considérant un coefficient de poussée des terres égal à 0,5. Durant la phase d'excavation réalisée sur une durée de 24h, la seule force volumique imposée est un chargement de pesanteur dirigé selon l'axe vertical (direction 1). Les propriétés du milieu poreux manquantes (par rapport aux tableaux 7.1 et 9.7) sont données dans le tableau 7.4:

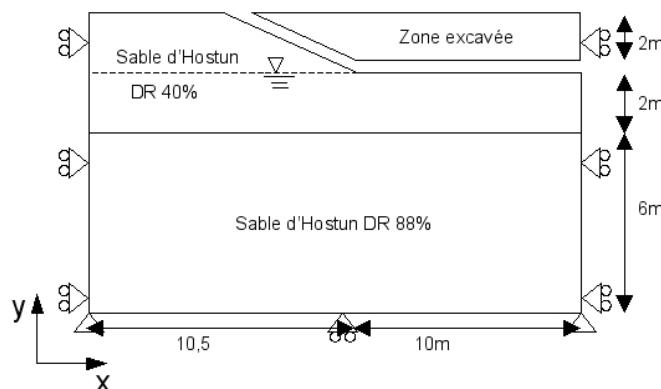


Illustration 7.48 : Géométrie et conditions aux limites du talus excavé

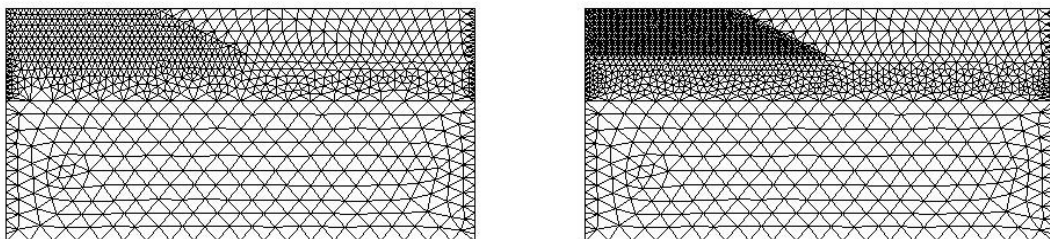
Propriétés matériaux	Sable d'Hostun $DR = 40\%$	Sable d'Hostun $DR = 88\%$
$\rho_s [\text{kg/m}^3]$	2700	2700
$\rho_e [\text{kg/m}^3]$	1000	1000
B	1	1
$\nu$	$10^{-3}$	$10^{-3}$
$K^{\text{int}} [\text{m}^3/\text{kg/s}]$	$10^{-10}$	$10^{-14}$
$H_w [\text{Pa}^{-1}]$	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$
porosité	0,47	0,4

**Tableau 7.4: Propriétés des milieux poreux pour le cas de stabilité de pente**

L'étude d'excavation est réalisée suivant les hypothèses suivantes :

- conditions sèches (modélisation en mécanique pure) pour le sol situé à hauteur de la zone excavée ;
- conditions couplées hydro-mécaniques (la surface libre de pression hydraulique est une ligne horizontale positionnée à la côte de 2 m dans le sol, surface libre après excavation) ;
- Le flux hydraulique est nul sur les parois latérales.

Les maillages utilisés pour réaliser cette étude sont présentés à l'illustration 7.49. Le maillage grossier est constitué de 1930 éléments triangulaires pour un total de 4040 nœuds. Le maillage le plus fin est quant à lui composé de 3908 éléments triangulaires pour un total de 8022 nœuds. Pour cette étude, les éléments finis utilisés sont définis par des fonctions de forme quadratiques à intégration sélective. Les parties hautes des maillages assignées d'une modélisation purement mécanique sont constituées pour le maillage grossier de 558 éléments triangulaires et le maillage fin de 2176 éléments triangulaires.

*Illustration 7.49 : Maillages utilisés pour l'étude d'excavation de pente*

Les conditions de bords hydrauliques de type flux nul n'influencent que très peu les résultats présentés ci-dessous en comparaison des conditions imposant un profil de pression hydrostatique sur les bords.

### 7.6.3 Résultats obtenus sans la méthode de second gradient de dilatation

La méthode employée pour réaliser l'excavation du talus utilise une approche « multi-modèles ». L'excavation linéaire dans le temps est effectuée en remplaçant le poids de la couche à retirer par des forces nodales équivalentes. Une fonction décroissante en fonction du temps est appliquée sur ces forces nodales. Durant la période d'excavation, la valeur des forces nodales varient de la force initiale appliquée à la valeur 0. Les résultats obtenus en terme de contraintes verticales

$\sigma_{yy}$  et des variables d'écroûissage  $r_3^m$  sont présentés sur l'illustration 7.50 sur le maillage grossier. Après la phase d'excavation, on constate un écroûissage non négligeable du sol dans la zone proche de l'excavation ( $r_3^m \approx 0,4$ ). On constate également une concentration de l'écroûissage au pied du talus, due à la présence de la singularité géométrique. La valeur du travail de second ordre local est également présentée sur l'illustration 7.51 et permet de constater une zone d'instabilité ( $d^2 W < 0$ ) de la pente en partie supérieure. Le travail du second ordre est calculé en considérant uniquement les contraintes effectives du milieu. Les déplacements générés ne sont pas présentés, mais apparaissent négligeables à l'échelle de la structure. Les résultats sont quasi-identiques durant cette phase d'excavation entre les deux maillages utilisés.

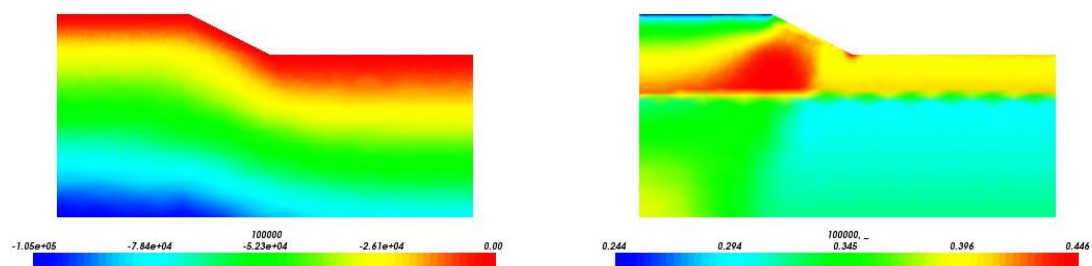


Illustration 7.50: Isovaleurs de  $\sigma_{yy}$  (gauche) et de  $r_3^m$  (droite) après les phases d'excavation

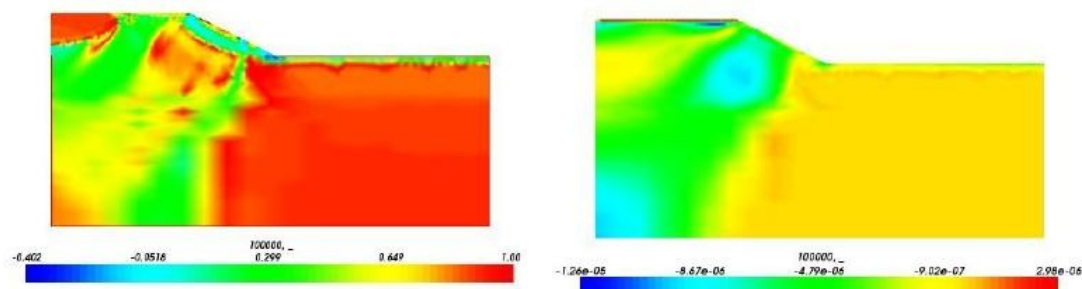


Illustration 7.51 : Isovaleurs du travail de second ordre  $d^2 W$  (gauche) et de la déformation volumique plastique  $\epsilon_v^p$  (droite) après la phase d'excavation

Après cette phase d'excavation, un chargement en tête de talus par déplacement est imposé sur une largeur de 1 m à 0,5 m du bord de la pente (illustration 7.52). L'amplitude maximale du déplacement vertical imposé égale à 20 cm est atteinte après 24 heures de temps de simulation. Le chargement est discrétisé sur 1000 intervalles égaux.

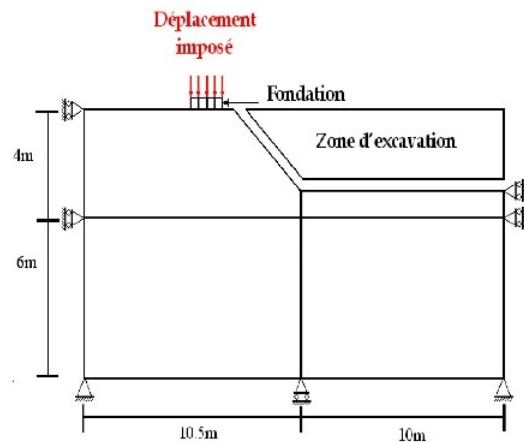


Illustration 7.52 : Géométrie et conditions aux limites du talus pendant le chargement de la fondation

Ce chargement conduit à produire une bande de cisaillement de forme circulaire débouchante au milieu de la pente (illustrations 7.53 et 7.54), nommé cercle de talus. Les profils de rupture du sol sous la fondation sont proches entre les deux maillages qualitativement, mais quantitativement les valeurs de déformations augmentent avec la finesse du maillage. La bande de cisaillement se caractérise par une concentration des valeurs du second invariant des déformations et une mobilisation complète de l'angle de frottement  $r_3^m \approx 1$  (illustration 7.55). Un massif de sol se détache de la pente le long de la bande de cisaillement (illustration 7.56). Les différences de résultats entre les deux maillages sont importantes pour les déplacements horizontaux relevés après enfoncement de la fondation (maillage grossier  $U_x^{m,g} \approx 0,18\text{m}$  ; maillage fin  $U_x^{m,f} \approx 0,25\text{m}$ ). Le phénomène de localisation induit comme précisé au §6.5 une dépendance pathologique des résultats aux maillages, caractérisée notamment par la concentration des déformations déviatoires dans une bande de glissement dépendante de la taille du maillage utilisé (illustration 7.57). On remarque également que les profils de rupture sont différents selon les maillages utilisés, puisque la simulation réalisée avec le maillage le plus fin conduit à l'apparition en partie supérieure d'une seconde bande de localisation horizontale.

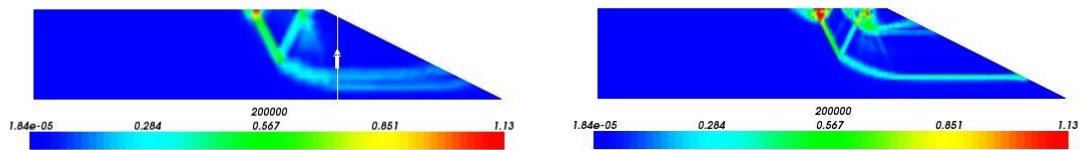


Illustration 7.53 : Isovaleurs du second invariant du tenseur des déformations sur le modèle mécanique après enfoncement de la fondation superficielle : a)(gauche) maillage grossier ; b) (droite) maillage fin

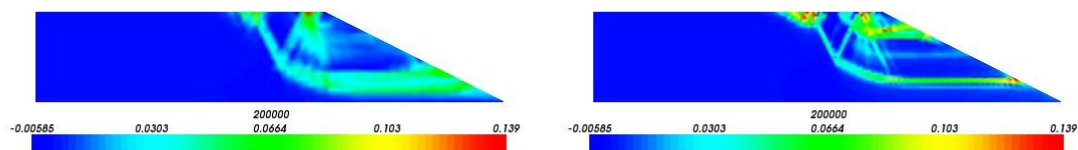


Illustration 7.54 : Isovaleurs de la déformation volumique plastique cumulée sur le modèle mécanique après enfoncement de la fondation superficielle : a)(gauche) maillage grossier ; b) (droite) maillage fin

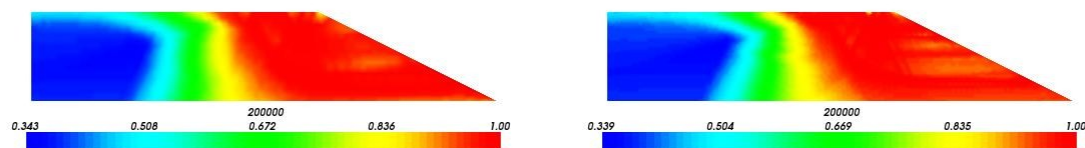


Illustration 7.55 : Isovaleurs de  $r_3^m$  sur le modèle mécanique après enfoncement de la fondation superficielle : a)(gauche) maillage grossier ; b)(droite) maillage fin

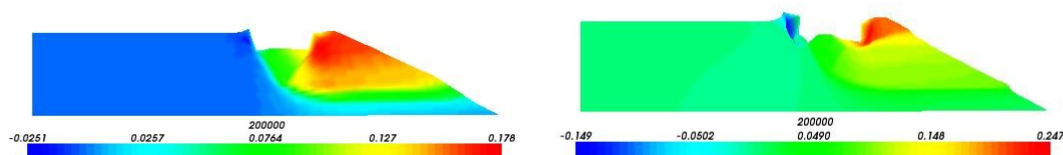


Illustration 7.56 : Déformée (x2) du déplacement latéral  $U_x$  du massif de sol après enfoncement  $U_1 = 20$  cm de la fondation superficielle : a) (gauche) maillage grossier ; b) (droite) maillage fin

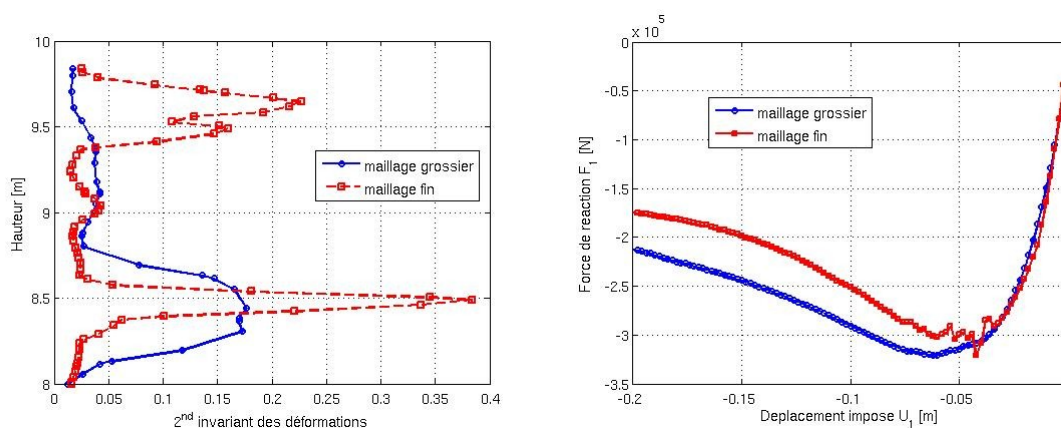


Illustration 7.57 : a) (gauche) Coupe transversale du second invariant du tenseur des déformations en fonction de la hauteur de talus ; b) (droite) Évolution de la réaction nodale obtenue à la fondation en fonction du déplacement imposé

L'illustration 7.57a représente une coupe du second invariant du tenseur des déformations présentée par une ligne avec flèche blanche sur l'illustration 7.53. La valeur maximale de la force de réaction et le déplacement pour laquelle elle est relevée varient également en fonction du maillage utilisé (illustration 7.57b). On peut également remarquer que le profil de la force axiale en tête de talus apparaît chahuté au pic de contraintes. La convergence du calcul a été plus difficile à atteindre pour ces niveaux de chargements.

La dépendance pathologique au maillage peut également être caractérisée par l'état d'activation des mécanismes plastiques du modèle de Hujeux. L'illustration 7.58 présente l'indicateur de plasticité relatif au mécanisme  $M_4^m$  (isotrope) en fonction de la hauteur. Le massif de sol apparaît en décharge sur toute sa hauteur à l'exception des bandes de cisaillement. La largeur de la bande est directement liée à la discrétisation spatiale utilisée au cours de la simulation numérique.

Par ailleurs, la réalisation de cette étude de stabilité de déblai avec un modèle de Hujoux n'intégrant pas la dimension de comportement adoucissant (  $b=0$  ) a été réalisée et est présentée en annexe 9.14 . Cette étude a pour but de démontrer la capacité du modèle de Hujoux intégré sous schéma implicite dans Code\_Aster de fournir des résultats équivalents aux approches classiques utilisées dans l'ingénierie (méthode des tranches selon Bishop) pour déterminer la charge limite que peut supporter le talus avant d'atteindre l'état critique du matériau sous la fondation.

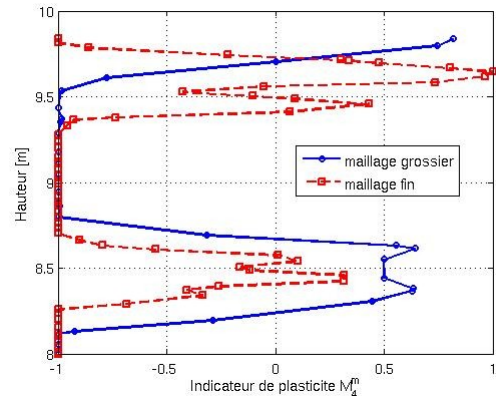


Illustration 7.58 : Indicateur de plasticité du mécanisme  $M_4^m$  en fonction de la hauteur

La section suivante présente les résultats obtenus en réalisant cette étude de stabilité avec le modèle de second gradient de dilatation pour les paramètres matériaux de Hujoux donnés aux tableaux 7.1 et 9.7.

#### 7.6.4 Résultats obtenus avec la méthode de second gradient de dilatation

Le problème aux limites considéré est identique à celui présenté dans la section §7.6.2 . La prise en compte d'une cinématique enrichie est limitée au modèle de mécanique pure, c'est à dire la partie supérieure du talus où apparaît la ligne de rupture dans la structure sous le chargement appliqué via la fondation superficielle. Les conditions naturelles portant sur le tenseur de double forces imposent  $S_j \cdot n_j = 0$  aux frontières du modèle mécanique.

Les développements et études réalisés sur des essais biaxiaux drainés ont clairement montré qu'il est nécessaire de prendre en compte l'état de contraintes initial du sol (§7.5.5 ).

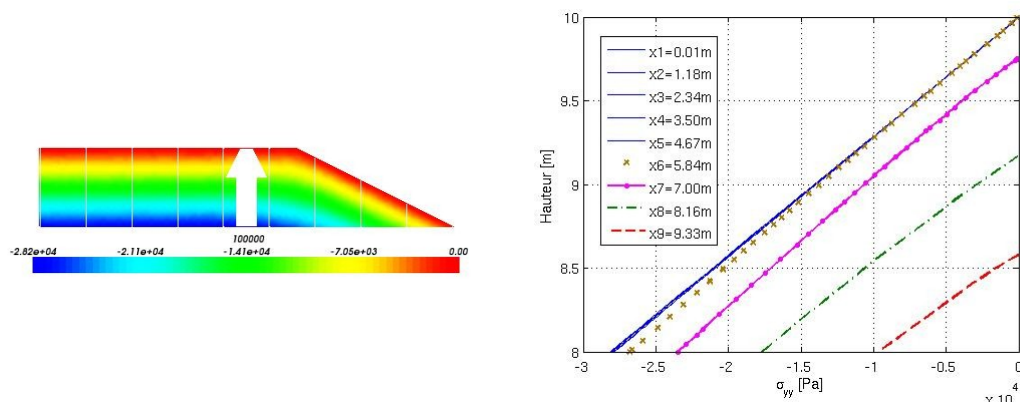


Illustration 7.59 : Profil des contraintes verticales après excavation pour différentes coupes dans le massif de sol

Pour tenir compte de cette dépendance du module de rigidité  $b_s$  à l'état de



contraintes du sol (variation entre  $\sigma_{yy} \approx -30 \text{ kPa}$  et la pression libre, illustration 7.59), la partie supérieure du talus est modélisée par couches successives de 0,5m de hauteur, valeur identique à celle utilisée lors de la phase d'excavation.

Les valeurs de  $b_s$  retenues sont présentées sur l'illustration 7.60. Ces valeurs sont établies en se fixant à partir de la discrétisation spatiale des maillages une largeur d'influence de 0,3m, valeur retenue suite aux calculs réalisés sans méthode de régularisation. La procédure pour déterminer les valeurs de  $b_s$  est identique à celle présentée lors de l'étude sur un essai biaxial drainé.

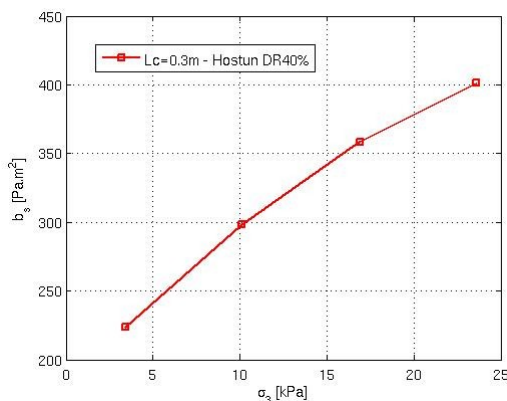


Illustration 7.60 : Évolution du module  $b_s$  réduit en fonction de l'état de contraintes initiales pour une valeur visée de  $l_c = 0.5 \text{ m}$

L'approximation consistant à assimiler le chemin de chargement suivi sous la fondation superficielle à un essai biaxial drainé n'apparaît pas comme légitime pour la partie proche de la zone excavée, puisque les conditions de chargement latéral sont modifiées et les états de contraintes plus faibles. En revanche, du côté opposé, cette approximation nous paraît plus légitime. Néanmoins, la localisation de la bande de cisaillement est relativement éloignée de la zone où le sol s'est déchargé. Les résultats de l'étude nous permettront d'établir si la procédure mise en place est adaptée au problème posé ou bien mal adaptée.

A la différence des études menées sur les essais biaxiaux drainés, l'état initial du sol n'est plus isotrope puisque le coefficient de poussée des terres a été choisi égal à  $K_0 = 0,5$ . Il faut donc en tenir compte dans la procédure mise en place pour définir les valeurs nécessaires du module de rigidité  $b_s$ .

Avant de présenter les résultats issus des calculs régularisés, on peut d'ores et déjà préciser les temps de calcul nécessaires pour réaliser ces études avec ou sans méthode de régularisation. Malgré l'ajout de degrés de liberté supplémentaires ( $\approx 10\%$ ), les études enrichies avec le modèle de second gradient de dilatation permettent un gain en temps CPU de 23% minimum. Le détail des temps de calcul est présenté dans le tableau 7.5. Le matériel informatique est constant pour des études réalisées sur un maillage identique.

Temps CPU (s)	Local	Régularisé	Différence
Maillage grossier	141695	108853	23.2%
Maillage fin	266591	202694	24.0%

Tableau 7.5: Temps CPU nécessaires pour réaliser les études de stabilité de pente avec ou sans régularisation

La seconde différence majeure concerne le nombre d'itérations globales réalisées. Pour les simulations sans méthodes de régularisation, le nombre d'itérations

globales de Newton est passé de 29991 itérations à 44507, soit une augmentation de 32% , tandis que pour les simulations régularisées, on constate une augmentation mineure de 4 % (passage de 17692 itérations à 18501 itérations).

Les résultats obtenus dans le cadre de cette étude sont présentés sur les illustrations 7.61, 7.62, 7.63, 7.64 et 7.65 pour les deux maillages. On constate tout d'abord un profil de rupture similaire avec des déplacements horizontaux en tête de talus très proches,  $U_2^{\max} \approx 0,20$  m (valeurs d'échelle communes entre les deux maillages sur les illustrations 7.61, 7.62 et 7.63). On remarque tout de même sur le maillage grossier, un mouvement d'ensemble plus large et la disparition de la deuxième bande de cisaillement sur le maillage le plus fin, en comparaison des résultats du calcul sans régularisation.

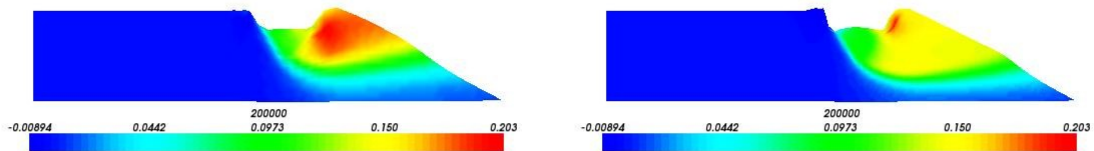


Illustration 7.61: Déformée horizontale  $U_x$  ( $\times 2$ ) après mise en place de la fondation superficielle sur une profondeur de 20 cm ; gauche) maillage grossier ; droite) maillage fin.

La largeur des bandes de cisaillement n'est plus réduite à celle d'un élément fini, mais se répartie sur plusieurs éléments. On note également un élargissement de la bande au point de sortie du cercle de talus avec une position décalée de la ligne de cisaillement entre les deux maillages (illustrations 7.62, 7.63 et 7.65a). L'évolution de la largeur des bandes de cisaillement peut s'expliquer par la non prise en compte initiale de l'état de contraintes du sol dans cette zone suite à la première phase d'excavation.

Les différences de profil de réponse entre les deux simulations régularisées peuvent se justifier par le nombre important de cercles de rupture possibles selon la méthode de Bishop pour une faible variation sur la charge appliquée à la fondation (conclusion établie suite à l'utilisation du logiciel Talren).

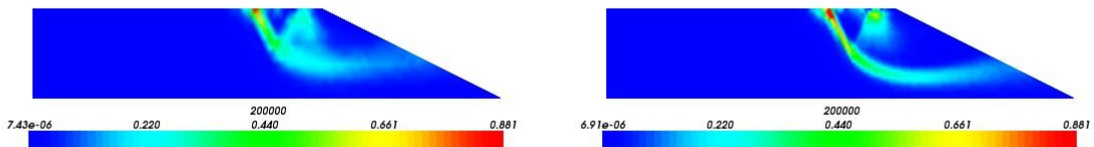


Illustration 7.62: Isovaleurs du second invariant du tenseur des déformations sur le modèle mécanique après enfoncement de la fondation superficielle : gauche) maillage grossier ; droite) maillage fin



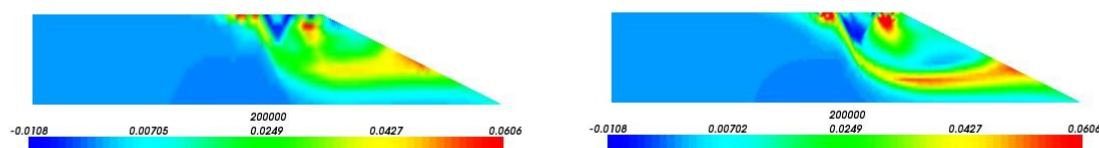


Illustration 7.63: Isovaleurs de la déformation volumique plastique cumulée  $\epsilon_v^p$  après mise en place de la fondation superficielle sur une profondeur de 20 cm ; gauche) maillage grossier ; droite) maillage fin.

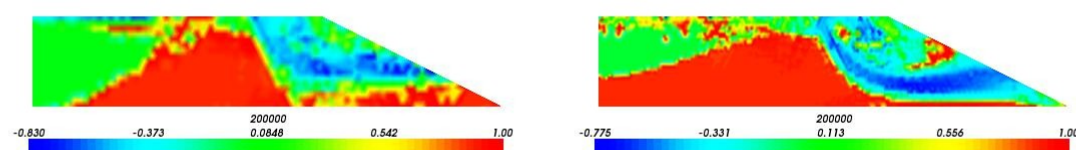


Illustration 7.64: Isovaleurs du travail de second ordre  $d^2 W$  après mise en place de la fondation superficielle sur une profondeur de 20 cm ; gauche) maillage grossier ; droite) maillage fin.

L'évolution de la force de réaction en tête de fondation apparaît différente entre les deux simulations, avec une valeur plus forte au pic pour le maillage grossier, phénomène identique au cas sans régularisation (illustration 7.65b). En superposé, on retrouve les résultats établis sans la méthode de second gradient de dilatation. Les aspects chahutés constatés sur le maillage le plus fin ont disparu avec la prise en compte des milieux enrichis du type second gradient de dilatation.

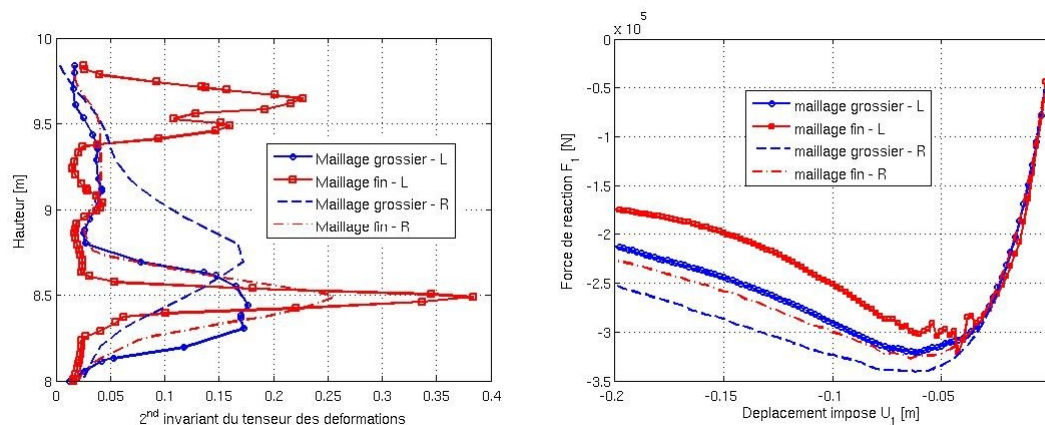


Illustration 7.65 : a-gauche) Coupe verticale du second invariant du tenseur des déformations après mise en place de la fondation superficielle sur une profondeur de 20 cm ; b-droite) Évolution de la force de réaction en tête de la fondation superficielle en fonction du déplacement imposé.

Pour cet exemple, la prise en compte des milieux du second gradient de dilatation ne conduit pas à des valeurs conservatives pour la force de réaction de la fondation superficielle. Les résultats issus de la simulation régularisée avec le maillage grossier ne présentent pas le mode de rupture dissipant le moins d'énergie et sollicitent une zone de sol trop large.

La valeur du paramètre  $b_s$  n'est pas adaptée à la discrétisation spatiale du maillage grossier et à l'évolution locale des états de contraintes, ce qui définit un profil de rupture différent sollicitant la partie du sol supérieure à la bande de cisaillement attendue (illustration 7.66). On remarque à nouveau que les états plastiques issus de la simulation régularisée avec le maillage fin ne sont plus concentrés dans une largeur d'un seul élément.

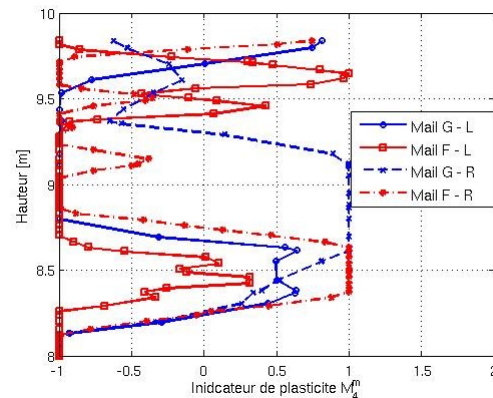


Illustration 7.66 : Indicateur de plasticité du mécanisme  $M_4^m$  en fonction de la hauteur de sol ; Mail G/F – Maillage Grossier/Fin

### 7.6.5 Bilan et perspectives de l'étude de stabilité de pente

L'analyse de la stabilité d'une pente sous le chargement d'une fondation superficielle a permis de mettre en place la méthodologie de simulation d'excavation du sol avec Code\_Aster, de mettre en avant le problème de dépendance pathologique des résultats au maillage et de proposer un outil de modélisation adapté pour résoudre ce problème de sensibilité avec la méthode des éléments finis.

Les premières conclusions de cette étude sont à rapprocher de la capacité démontrée du Code\_Aster à modéliser et converger pour des études d'instabilités d'ouvrages en terre mettant en avant le phénomène de localisation des déformations avec le modèle de Hujeux. La bonne concordance des résultats issus de Code\_Aster en comparaison des résultats obtenus avec la méthode des tranches de Bishop sous Talren confirment également les aptitudes du modèle de Hujeux à représenter de façon flexible le comportement du sol souhaité.

Les simulations réalisées dans le cadre de la mécanique classique des milieux continus ont montré une concentration des déformations dans des bandes de cisaillement, fonction de la discrétisation spatiale utilisée.

En prenant en compte la cinématique enrichie des milieux du second gradient de dilatation, la dépendance pathologique des résultats aux maillages a été corrigée (illustration 7.63) et le temps de calcul réduit malgré le nombre supérieur de degrés de liberté. La charge limite obtenue dans le cas des simulations régularisées est équivalente à celle des simulations « locales ». La zone de régularisation se limite à la partie supérieure du talus, zone où se concentrent les déformations majeures dans le cadre de cette étude.

En revanche, des corrections doivent être apportées à la procédure mise en place pour la réalisation de cette étude. Les simulations menées adoptent un module de rigidité de régularisation constant par couches. Cette hypothèse conduit dans la zone proche de l'excavation à une zone d'interaction plus large que celle attendue. Cette procédure ne tient pas compte de la diminution des états de contraintes dans la zone déstabilisée par l'excavation. Les simulations réalisées sur des essais biaxiaux ont en effet montré une dépendance de la valeur du module de rigidité  $b_s$  à l'état de contraintes de confinement (§7.5).

Cette « faiblesse » de la modélisation conduit à modifier le profil de rupture dans la zone proche de la pente et sollicite en cisaillement une largeur de sol trop importante. Il apparaît nécessaire d'adapter la procédure en lui permettant d'affecter une valeur du module de rigidité  $b_s$  en fonction de l'état de contraintes du matériau. Cet aspect permettrait de bénéficier des propriétés régularisantes des milieux du second gradient de dilatation en couplage avec le modèle de Hujeux ou tout ceux basés sur les modèles de type Cam-Clay.

## 8 Conclusions générales et perspectives

La modélisation fine du comportement des sols est un domaine complexe conduisant à la formulation de modèles non standard généralisés. Les besoins actuels de l'ingénierie s'intéressant au comportement sismique de structures géotechniques, tant au stade de la conception qu'à celui de la réévaluation d'ouvrages existants, nécessitent l'utilisation de tels modèles.

Le travail de thèse consistait dans un premier temps à réaliser l'intégration du modèle élastoplastique multimécanismes de l'ECP dit de Hujeux, un des rares modèles reconnus pour sa capacité à représenter le comportement des sols sous chargements cycliques et sur une large gamme de déformations, selon un schéma implicite qui garantit à convergence de respecter en tout point la formulation théorique du modèle. La précision et la robustesse du schéma implicite d'intégration (dans Code\_Aster) ont été démontrées sur des chemins variés de chargement homogène, notamment par comparaison aux résultats obtenus en intégration explicite. La modélisation de la construction par couches d'une colonne de sol suivie de l'application d'un chargement sismique a été réalisée et les solutions obtenues sont en très bon accord avec les solutions fournies par une intégration locale explicite (GEFDyn), utilisant le même modèle de comportement intégré selon un schéma explicite à sous-incrémentation. Par la suite, le modèle a été utilisé pour développer des méthodologies de simulations de construction par couches, mise en eau et comportement sous chargement sismique d'une digue en terre.

Néanmoins, les études réalisées en parallèle selon les deux schémas d'intégration du modèle ont montré que l'intégration implicite n'est pas aussi performante que le schéma explicite si on se restreint à l'analyse du temps CPU consommé, dans les phases où les instabilités adviennent. Des améliorations du schéma implicite sont néanmoins possibles à faible coût de développement. L'insertion d'un algorithme de recherche linéaire dans la résolution du système d'équations locales nous apparaît comme un choix légitime et potentiellement très intéressant en terme de gain sur le temps CPU.

La modélisation numérique, par la méthode des éléments finis, des problèmes aux limites prenant en compte des modèles de comportement élastoplastique non standard adoucissant conduit à une dépendance pathologique des solutions à la discrétisation spatiale utilisée pour des modes de rupture du type localisé. Les déformations plastiques se concentrent alors dans une largeur d'élément, selon le type de maillage.

Dans le cadre de cette thèse, nous justifions l'utilisation du cadre des milieux continus enrichis du second gradient de dilatation pour réaliser des simulations dont les solutions sont objectives par rapport aux maillages utilisés, avec le modèle de Hujeux. En complément des éléments théoriques développés dans la thèse de Fernandes (2009a) sur la définition des milieux du second gradient de dilatation, nous avons étendu cette approche aux équations de la dynamique. L'impact de la prise en compte des milieux du second gradient de dilatation sur la propagation des ondes dans un milieu élastique ou poro-élastique ne modifie pas fondamentalement le champ d'ondes dans le milieu, dans le domaine de fréquences visées lors d'un séisme. L'impact de cette formulation enrichie apparaît négligeable sur les termes d'énergie et ne modifie pas la valeur du paramètre de contrôle conduisant à l'instabilité du domaine étudié.

La prise en compte dans les simulations numériques des milieux du second gradient de dilatation permet d'améliorer nettement la convergence numérique globale des calculs non linéaires, supprime la dépendance pathologique des solutions aux maillages et ne modifie pas le point d'apparition du mode d'instabilités. De plus, malgré l'ajout d'une inconnue nodale supplémentaire, l'impact sur le temps CPU nécessaire à la réalisation des études est très faible, voire positif en comparaison des performances relevées avec la méthode classique des milieux continus, comme cela a été observé sur l'étude de la fondation sur talus après excavation.

Un point majeur avant une utilisation « presse-bouton » de cette approche est relié à la maîtrise du paramètre de régularisation. Dans le cadre des simulations numériques réalisées sur des essais biaxiaux drainés avec le modèle de Hujieux, nous avons montré que l'exemple analytique d'une bande dilatante cisailée permet de prédire et corroborer la largeur des bandes de localisation obtenues numériquement.

L'extension de cette approche à tout type de chargement doit encore être approfondie pour proposer une méthodologie robuste et efficace déterminant la valeur du paramètre de régularisation fonction des états de contraintes du matériau et de ses paramètres. Une première voie d'approche consisterait à réaliser un premier calcul sur maillage grossier pour exploiter les chemins de chargement conduisant à des instabilités des structures et permettre de définir en post-traitement à ce premier calcul les valeurs nécessaires pour le paramètre de régularisation.

Cette méthode de régularisation restreint le domaine de solutions possibles durant la phase d'adoucissement du matériau mais n'en assure pas l'unicité. Il apparaît nécessaire à terme de travailler dans le continuum de solutions possibles et de réussir à définir la plus pénalisante pour la structure.

La mise en œuvre de la régularisation avec second gradient de dilatation dans le cadre du modèle de Hujieux a montré l'intérêt de son usage, tout comme cela a été fait avec d'autres modèles de comportement produisant la même pathologie.

## 9 Annexes

9 Annexes.....	193
9.1 Relations entre les paramètres élastiques.....	195
9.2 Calcul analytique de la matrice tangente d'intégration locale .....	197
9.3 Essai cyclique induisant une rotation de l'état de contraintes.....	209
9.4 Essai biaxial drainé sur sable d'Hostun.....	213
9.5 Essai triaxial non drainé cyclique.....	223
9.6 Essai de cisaillement avec micro-décharges.....	235
9.7 Modélisation d'une digue en terre avec le modèle de Hujeux.....	239
9.8 Analyse des systèmes dynamiques.....	247
9.9 Perturbation de la suite des itérés de la méthode de Newton.....	255
9.10 Application du modèle de second gradient volumique à la dynamique.....	257
9.11 Tenseur élastoplastique du modèle Hujeux type Cam-Clay (HCC).....	267
9.12 Domaine des directions instables selon le critère de Rice.....	269
9.13 Simulation d'un essai biaxial drainé sur sable d'Hostun à DR=40%.....	271
9.14 Analyse de stabilité de pente avec la méthode des tranches de Bishop....	277



## 9.1 Relations entre les paramètres élastiques

Les relations entre les différents paramètres utilisés pour représenter l'élasticité linéaire sont présentées dans le tableau 9.1 :

Couple de paramètres	Module de cisaillement $G = \mu$	Module d'Young $E$	Module de Compression $K$	Coefficient de Poisson $\nu$	Paramètre de Lamé $\lambda$
$G, E$	$G$	$E$	$\frac{EG}{9G-3E}$	$\frac{E-2G}{2G}$	$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$
$G, K$	$G$	$\frac{9GK}{3K+G}$	$K$	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$	$K - \frac{2G}{3}$
$G, \lambda$	$G$	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\lambda + \frac{2G}{3}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\lambda$
$G, \nu$	$G$	$2G(1+\nu)$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\nu$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$
$E, K$	$\frac{3KE}{9K-E}$	$E$	$K$	$\frac{3K-E}{6K}$	$\frac{K(9K-3E)}{9K-E}$
$E, \nu$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$E$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\nu$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
$K, \lambda$	$\frac{3(K-\lambda)}{2}$	$\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$	$K$	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	$\lambda$
$K, \nu$	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$3K(1-2\nu)$	$K$	$\nu$	$\frac{3K\nu}{1+\nu}$

**Tableau 9.1 : Relations entre les constantes élastiques**





## 9.2 Calcul analytique de la matrice tangente d'intégration locale

On doit résoudre par une méthode de Newton le système d'équations non linéaires locales suivant :  $R(\Delta Y)=0$  , écrit à la fin de l'incrément étudié, où  $\Delta Y = (\Delta \sigma_{ij}, \Delta \epsilon_v^p, \Delta r_k^K, \Delta(\Delta \lambda_k^K))$  . Ceci s'écrit avec  $H_{ijkl}$  le tenseur élastique d'ordre 4 du modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^- - H_{ijrs}(\sigma^+) \left( \Delta \epsilon_{rs} - \sum_{k \in [1,4]} \left( \Delta \lambda_k^K (\Psi_k^K)_{rs} \right) \right) = 0 \quad (\mathbf{LE}_{ij}) \\ (\epsilon_v^p)^+ - (\epsilon_v^p)^- - \sum_{k \in [1,4]} \left( \Delta \lambda_k^K (\Psi_k^K)_{rs} I_{rs} \right) = 0 \quad (\mathbf{LEVP}) \\ (r_k^K)^+ - (r_k^K)^- - \Delta \lambda_k^K \rho_k^K = 0 \quad (\mathbf{LR}_k^K) \\ f_k^K = 0 \quad (\mathbf{LF}_k^K) \end{array} \right. \quad (9.1)$$

Il faut donc établir le calcul de la matrice tangente  $\left( \frac{dR}{d\Delta Y} \right)_{\Delta Y}$  , ce qui nécessite le calcul analytique des différentes dérivées suivantes par rapport à  $Y = (\sigma_{ij}, \epsilon_v^p, r_k^K, \Delta \lambda_k^K)$  :

$$\left( \frac{dR}{d(\Delta Y)} \right)_{\Delta Y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial \sigma_{rs}} & \frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial \epsilon_v^p} & \frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial r_k^K} & \frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial (\Delta \lambda_k^K)} \\ \frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial \sigma_{rs}} & \frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial \epsilon_v^p} & \frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial r_k^K} & \frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial (\Delta \lambda_k^K)} \\ \frac{\partial \mathbf{LR}_k^K}{\partial \sigma_{rs}} & \frac{\partial \mathbf{LR}_k^K}{\partial \epsilon_v^p} & \frac{\partial \mathbf{LR}_k^K}{\partial r_k^K} & \frac{\partial \mathbf{LR}_k^K}{\partial (\Delta \lambda_k^K)} \\ \frac{\partial \mathbf{LF}_k^K}{\partial \sigma_{rs}} & \frac{\partial \mathbf{LF}_k^K}{\partial \epsilon_v^p} & \frac{\partial \mathbf{LF}_k^K}{\partial r_k^K} & 0 \end{bmatrix} \quad (9.2)$$

Ces dérivées sont établies dans les paragraphes §9.2.1 , §9.2.2 , §9.2.3 , §9.2.4 et §9.2.5

### 9.2.1 Dérivées de l'équation d'état

Elles proviennent de l'équation d'état 4.15 :

$$\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^- - H_{ijrs}(\sigma^+) \left( \Delta \epsilon_{rs} - \sum_{k \in [1,4]} \left( \Delta \lambda_k^K (\Psi_k^K)_{rs} \right) \right) = 0 \quad (\mathbf{LE}_{ij})$$

- **Calcul des composantes**  $\frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial \sigma_{rs}}$  **(tenseur d'ordre 4) :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial (\sigma^+)_{rs}} = & \frac{\partial (\sigma^+)_{ij}}{\partial (\sigma^+)_{rs}} - \frac{\partial H_{ijmn}^+}{\partial (\sigma^+)_{rs}} \left( \Delta \epsilon_{mn} - \sum_{k \in \llbracket 1,4 \rrbracket} \Delta \lambda_k^K (\Psi_k^K)^+_{mn} \right) \\ & + H_{ijmn}^+ \sum_{k \in \llbracket 1,3 \rrbracket} \Delta \lambda_k^K \frac{\partial (\Psi_k^K)^+_{mn}}{\partial (\sigma^+)_{rs}} \end{aligned} \quad (9.3)$$

La contribution des mécanismes isotropes est nulle dans le dernier terme de l'expression 9.3. Les expressions des différents termes mis en jeu dans le calcul de cette dérivée sont :

$$\frac{\partial H_{ijmn}^+}{\partial \sigma_{rs}^+} = \frac{\partial H_{ijmn}^+}{\partial p(\sigma^+)} \frac{\partial p(\sigma^+)}{\partial \sigma_{rs}^+} = \frac{n_e}{P_{ref}} \left( \frac{p(\sigma^+)}{P_{ref}} \right)^{n_e-1} H_{ijmn}^{ref} \frac{1}{3} I_{rs} = \frac{n_e}{3 p(\sigma^+)} H_{ijmn}^+ I_{rs} \quad (9.4)$$

$$\frac{\partial (\Psi_k^m)^+_{mn}}{\partial \sigma_{rs}^+} = \frac{1}{2 q_k} \frac{\partial (S_k)^+_{mn}}{\partial \sigma_{rs}^+} - \frac{(S_k)^+_{mn}}{2 q_k^2} \frac{\partial q_k}{\partial \sigma_{rs}^+} - \alpha \frac{\zeta(r_k^m)}{2} (I_k)^+_{mn} \left( \frac{1}{p_k} \frac{\partial q_k}{\partial \sigma_{rs}^+} - \frac{q_k}{p_k^2} \frac{\partial p_k}{\partial \sigma_{rs}^+} \right) \quad (9.5)$$

d'où

$$\frac{\partial (\Psi_k^m)^+_{mn}}{\partial \sigma_{rs}^+} = \frac{1}{2 q_k} (\mathbf{Dev}_k)^+_{mnrs} - \frac{(S_k)^+_{mn}}{4 q_k^3} (S_k)^+_{rs} - \alpha \frac{\zeta(r_k^m)}{4 p_k} (I_k)^+_{mn} \left( \frac{(S_k)^+_{rs}}{q_k} - \frac{q_k}{p_k} (I_k)^+_{rs} \right)$$

$$\frac{\partial (\Psi_k^c)_{mn}}{\partial \sigma_{rs}^+} = \frac{1}{2 q_k^c} \frac{\partial (S_k^c)_{mn}}{\partial \sigma_{rs}^+} - \frac{(S_k^c)_{mn}}{4 (q_k^c)^3} (S_k^c)_{ij} \frac{\partial (S_k^c)_{ij}}{\partial \sigma_{rs}^+} - \alpha \frac{\zeta(r_k^c)(I_k)_{mn}}{4 p_k q_k^c} \times \dots$$

$$\dots \left( \frac{\partial (S_k^c)_{ij}}{\partial \sigma_{rs}^+} (S_k)_{ij} + \frac{\partial (S_k)_{ij}}{\partial \sigma_{rs}^+} (S_k^c)_{ij} - \frac{(S_k^c)_{ij} (S_k)_{ij}}{p_k q_k^c} \left( q_k^c \frac{\partial p_k}{\partial \sigma_{rs}^+} + p_t \frac{\partial q_k^c}{\partial \sigma_{rs}^+} \right) \right)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\Psi_k^c)_{mn}}{\partial \sigma_{rs}^+} = & \frac{1}{2 q_k^c} \left( (\mathbf{Dev}_k)_{mnrs} - \frac{F(p_k, \epsilon_v^p) - bM}{2} (X_k^H + t_k^H r_k^c)_{mn} (I_k)_{rs} \right) \\ & - \frac{(S_k^c)_{mn}}{4 (4 q_k^c)^3} \left( (S_k^c)_{rs} - \frac{F(p_k, \epsilon_v^p) - bM}{2} (X_k^H + t_k^H r_k^c)_{ij} (S_k^c)_{ij} (I_k)_{rs} \right) \\ & + \frac{\alpha \zeta(r_k^c)(I_k)_{mn}}{4 p_k q_k^c} \left( \frac{F(p_k, \epsilon_v^p) - bM}{2} (X_k^H + t_k^H r_k^c)_{ij} (S_k^c)_{ij} (I_k)_{rs} \right. \\ & + \frac{(S_k)_{ij} (S_k^c)_{ij}}{2 q_k^c} \left( \frac{(S_k^c)_{rs}}{q_k^c} - \frac{F(p_k, \epsilon_v^p) - bM}{2} (X_k^H + t_k^H r_k^c)_{ij} (t_k^H)_{ij} (I_k)_{rs} \right) \\ & \left. + \frac{(S_k)_{ij} (S_k^c)_{ij}}{2 p_k} \left( (I_k)_{rs} - (S_k)_{rs} (S_k^c)_{rs} \right) \right) \end{aligned} \quad (9.6)$$

- **Calcul des composantes**  $\frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial \epsilon_v^p}$  (tenseur d'ordre 2) :

$$\frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial \epsilon_v^p} = 3 K_{ref} \left| \frac{p(\sigma)}{P_{ref}} \right|^{n_e} I_{ij} \quad (9.7)$$

- **Calcul des composantes**  $\frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial r_k^K}$  (tenseur d'ordre 2) :

En premier lieu, on différencie les dérivées par rapport aux mécanismes déviatoires et isotopes. Ensuite, des différences existent également entre les mécanismes monotones et cycliques.

- Mécanismes déviatoires

$$\frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial r_k^K} = H_{ijrs} \sum_{t \in [1,3]} \Delta \lambda_t^T \frac{\partial (\Psi_t^T)_{rs}}{\partial r_t^T} = \Delta \lambda_k^K H_{ijrs} \frac{\partial (\Psi_k^K)_{rs}}{\partial r_k^K} \quad (9.8)$$

- Mécanismes déviatoires monotones

$$\frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial r_k^m} = \begin{cases} 0 & r_k^m \leq r_{hys} \\ -\frac{\alpha}{2} \Delta \lambda_k^m \left( \sin \psi + \frac{q_k}{p_k} \right) \frac{d\zeta}{dr_k^m} H_{ijrs} (I_k)_{rs} & \text{si } r_{hys} \leq r_k^m \leq r_{mob} \\ 0 & r_k^m \geq r_{mob} \end{cases} \quad (9.9)$$

#### ■ Mécanismes déviatoires cycliques

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial r_k^c} = & \frac{\Delta \lambda_k^c}{2} H_{ijrs} \left( \frac{p_k F_k}{q_k^c} \left( \frac{(S_k^c)_{ij} (t_k^H)_{ij}}{2 (q_k^c)^2} (S_k^c)_{rs} - (t_k^H)_{rs} \right) \right. \\ & - \alpha \left( \sin \psi + \frac{(S_k^c)_{ij} (S_k)_{ij}}{2 p_k q_k^c} \right) \frac{d\zeta}{dr_k^c} (I_k)_{rs} \\ & \left. - \alpha \frac{\zeta(r_k^c) F_k}{2 q_k^c} \left( \frac{(S_k^c)_{ij} (t_k^H)_{ij}}{2 (q_k^c)^2} (S_k)_{ij} (S_k^c)_{ij} - (S_k)_{ij} (t_k^H)_{ij} \right) (I_k)_{rs} \right) \end{aligned} \quad (9.10)$$

#### ○ Mécanismes isotropes

Les dérivées sont nulles pour les mécanismes isotropes monotone et cyclique.

- **Calcul des composantes**  $\frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial \Delta \lambda_k^K}$  **(tenseur d'ordre 2) :**

$$\frac{\partial \mathbf{LE}_{ij}}{\partial \Delta \lambda_k^K} = H_{ijrs}^+ (\Psi_k^K)_{rs} \quad (9.11)$$

### 9.2.2 Dérivées de l'équation d'évolution de la déformation plastique volumique

Elles proviennent de l'évolution de la déformation volumique plastique :

$$(\epsilon_v^p)^+ - (\epsilon_v^p)^- - \sum_{k \in [1,4]} \left( \Delta \lambda_k^K (\Psi_k^K)_{rs} I_{rs} \right) = 0 \quad \mathbf{LEVP}$$

- **Calcul des composantes**  $\frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial \sigma_{ij}}$  **(tenseur d'ordre 2) :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial \sigma_{ij}^+} = & \sum_{k \in \llbracket 1,3 \rrbracket} \frac{\Delta \lambda_k^m}{2 p_k} \alpha \zeta(r_k^m) \left( \frac{(S_k)_{ij}}{q_k} - \frac{q_k (I_k)_{ij}}{p_k} \right) \\ & + \sum_{k \in \llbracket 1,3 \rrbracket} \frac{\Delta \lambda_k^m}{2 p_k q_k^c} \alpha \zeta(r_k^c) \left( (S_k)_{ij} + (S_k^c)_{ij} \left( 1 - \frac{(S_k)_{mn} (S_k^c)_{mn}}{(q_k^c)^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (9.12)$$

Les mécanismes isotropes ne contribuent pas au calcul de cette dérivée.

- **Calcul des composantes  $\frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial \epsilon_v^p}$  (scalaire) :**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial \epsilon_v^p} = & 1 - \sum_{k \in \llbracket 1,3 \rrbracket} \frac{\Delta \lambda_k^c}{2 q_k^c} b \beta M \alpha \zeta(r_k^c) \\ & \left[ (S_k)_{ij} (X_k^H + t_k^H(r_k^c))_{ij} - \frac{(S_k^c)_{ij} (S_k)_{ij}}{2 q_k^c} (X_k^H + t_k^H(r_k^c)) \right] \end{aligned} \quad (9.13)$$

- **Calcul des composantes  $\frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial r_k^K}$  (scalaire) :**

Seuls les mécanismes déviatoires ont des composantes suivant cette dérivée.

- Mécanismes déviatoires monotones

$$\frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial r_k^m} = \begin{cases} 0 & r_k^m \leq r_{hys} \\ \frac{-\alpha \Delta \lambda_k^m x_m}{r_{mob} - r_{hys}} \left( \frac{r_k^m - r_{hys}}{r_{mob} - r_{hys}} \right)^{x_m - 1} \left( \sin \psi + \frac{q_k}{p_k} \right) & r_{hys} \leq r_k^m \leq r_{mob} \\ 0 & r_k^m \geq r_{mob} \end{cases} \quad (9.14)$$

- Mécanismes déviatoires cycliques

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial r_k^c} = & \Delta \lambda_k^c \alpha \left( \frac{\partial \zeta}{\partial r_k^c} \left( \sin \psi + \frac{(S_k^c)_{ij} (S_k)_{ij}}{2 p_k q_k^c} \right) \right. \\ & \left. \frac{F_k \zeta(r_k^c)}{2 q_k^c} \left( (t_k^H)_{ij} (S_k)_{ij} - \frac{(S_k^c)_{ij} (S_k)_{ij}}{2 q_k^c} (t_k^H)_{mn} (S_k^c)_{mn} \right) \right) \end{aligned} \quad (9.15)$$

- **Calcul des composantes  $\frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial \Delta \lambda_k^K}$  (scalaire) :**

$$\frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial \Delta \lambda_k^K} = - \left( \Psi_k^K \right)_{ij} (I_k)_{ij} \quad (9.16)$$

- Mécanismes déviatoires monotones

$$\frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial \Delta \lambda_k^m} = \alpha \zeta(r_k^m) \left( \sin \psi + \frac{q_k}{p_k} \right) \quad (9.17)$$

- Mécanismes déviatoires cycliques

$$\frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial \Delta \lambda_k^c} = \alpha \zeta(r_k^c) \left( \sin \psi + \frac{(S_k^c)_{ij} (S_k^c)_{ij}}{2 p_k q_k^c} \right) \quad (9.18)$$

- Mécanisme isotrope monotone

$$\frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial \Delta \lambda_4^m} = -\text{sign}(p) \quad (9.19)$$

- Mécanismes isotropes cycliques

$$\frac{\partial \mathbf{LEVP}}{\partial \Delta \lambda_4^c} = -\text{sign}(p) \text{sign}(p^c) \quad (9.20)$$

### 9.2.3 Dérivées de l'équation d'évolution des variables d'écrouissage

Elles proviennent de l'évolution de l'écrouissage des différents mécanismes du modèle de Hujeux, déviatoires et isotropes :

$$(r_k^K)^+ - (r_k^K)^- - \Delta \lambda_k^K \rho_k^K = 0 \quad (\mathbf{LR}_k^K)$$

- **Calcul des composantes**  $\frac{\partial \mathbf{LR}_k^K}{\partial \sigma_{ij}}$  **(tenseur d'ordre 2) :**

Seuls les mécanismes déviatoires cycliques apportent une contribution au calcul de cette dérivée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{LR}_k^c}{\partial \sigma_{ij}^+} = & -\Delta \lambda_k^c \frac{(1 - r_k^c)^2}{a_c + \zeta(r_k^c)(a_m - a_c)} \frac{1}{\left( 2 q_k^c - (S_k^c)_{rs} (t_k^H)_{rs} \right)} \\ & \frac{\partial (S_k^c)_{rs}}{\partial \sigma_{ij}^+} \left( 2 q_k^c (t_k^H)_{rs} - \frac{(S_k^c)_{mn} (t_k^H)_{mn}}{q_k^c} (S_k^c)_{rs} \right) \end{aligned} \quad (9.21)$$

- **Calcul des composantes**  $\frac{\partial \mathbf{LR}_k^K}{\partial \epsilon_v^p}$  **(scalaire) :**

- Mécanismes déviatoires cycliques

$$\frac{\partial \mathbf{LR}_k^c}{\partial \epsilon_v^p} = \frac{-\Delta \lambda_k^c (1-r_k^c)^2}{a_c + \zeta(r_k^c)(a_m - a_c)} \frac{1}{\left(2q_k^c - (S_k^c)_{rs}(t_k^H)_{rs}\right)} \quad (9.22)$$

$$\frac{\partial (S_k^c)_{rs}}{\partial \epsilon_v^p} \left(2q_k^c(t_k^H)_{rs} - \frac{(S_k^c)_{mn}(t_k^H)_{mn}}{q_k^c} (S_k^c)_{rs}\right)$$

avec

$$\frac{\partial (S_k^c)_{ij}}{\partial \epsilon_v^p} = \beta M b p_k (X_k^H + t_k^H r_k^c)_{rs}$$

- Mécanismes isotropes

$$\frac{\partial \mathbf{LR}_4^K}{\partial \epsilon_v^p} = -\frac{\Delta \lambda_4^K P_{ref} \beta (1-r_4^K)^2}{c_K P_c(\epsilon_v^p)} \quad (9.23)$$

- **Calcul des composantes**  $\frac{\partial \mathbf{LR}_k^K}{\partial r_k^K}$  (scalaire) :

- Mécanismes déviatoires

■ Mécanismes déviatoires monotones

$$\frac{\partial \mathbf{LR}_k^m}{\partial r_k^m} = \begin{cases} 1 + \Delta \lambda_k^m \frac{2(1-r_k^m)}{a_c} & r_k^m < r_{hys} \\ 1 + \frac{\Delta \lambda_k^m (1-r_k^m)}{a_c + \zeta(r_k^m)(a_m - a_c)} \left(2 + \frac{(1-r_k^m)(a_m - a_c)}{a_c + \zeta(r_k^m)(a_m - a_c)} \frac{\partial \zeta}{\partial r_k^m}\right) & r_{hys} < r_k^m < r_n \\ 1 + \Delta \lambda_k^m \frac{2(1-r_k^m)}{a_m} & r_k^m > r_{mob} \end{cases} \quad (9.24)$$

■ Mécanismes déviatoires cycliques

$$\frac{\partial \mathbf{LR}_k^c}{\partial r_k^c} = 1 + \frac{\Delta \lambda_k^c (1-r_k^c)}{a_c + \zeta(r_k^c)(a_m - a_c)} \frac{2q_k^c}{2q_k^c - (S_k^c)_{ij}(t_k^H)_{ij}} \left(2 + \frac{(1-r_k^c)(a_m - a_c)}{a_c + \zeta(r_k^c)(a_m - a_c)} \frac{\zeta}{\partial r_k^c}\right) \quad (9.25)$$

$$- \frac{\Delta \lambda_k^c (1-r_k^c)^2}{a_c + \zeta(r_k^c)(a_m - a_c)} \frac{1}{2q_k^c - (S_k^c)_{ij}(t_k^H)_{ij}} \frac{\partial (S_k^c)_{ij}}{\partial r_k^c} \left(2q_k^c(t_k^H)_{ij} - \frac{(S_k^c)_{rs}(t_k^H)_{rs}}{q_k^c} (S_k^c)_{ij}\right)$$

avec :



$$\frac{\partial (S_k^c)_{ij}}{\partial r_k^c} = -p_k(\sigma) F(\sigma, \epsilon_v^p) (t_k^H)_{ij}$$

- Mécanismes isotropes

$$\frac{\partial \text{LR}_4^K}{\partial r_4^K} = 1 + 2\Delta \lambda_4^K \frac{(1-r_4^K)}{c_K} \left( \frac{P_{ref}}{P_c(\epsilon_v^p)} \right) \quad (9.26)$$

- **Calcul des composantes  $\frac{\partial \text{LR}_k^K}{\partial \lambda_k^K}$  (scalaire) :**

- Mécanismes déviatoires

$$\frac{\partial \text{LR}_k^K}{\partial \lambda_k^K} = -\frac{(1-r_k^K)^2}{a_c + \zeta(r_k^K)(a_m - a_c)} \gamma_k^K \quad (9.27)$$

avec

$$\begin{cases} \gamma_k^m &= 1 \\ \gamma_k^c &= \frac{2q_k^c}{2q_k^c - (S_k^c)_{ij} (t_k^H)_{ij}} \end{cases}$$

- Mécanismes isotropes

$$\frac{\partial \text{LR}_4^K}{\partial \lambda_4^K} = -\frac{(1-r_4^K)^2}{c_K} \left( \frac{P_{ref}}{P_c(\epsilon_v^p)} \right) \quad (9.28)$$

### 9.2.4 Dérivées des critères des mécanismes plastiques

Elles proviennent des critères exprimés au chapitre §3 :

$$f_k^K = 0 \quad (\mathbf{LF}_k^K)$$

- **Calcul des composantes  $\frac{\partial \mathbf{LF}_k^K}{\partial \sigma_{ij}}$  (tenseur d'ordre 2) :**

- Mécanismes déviatoires

- Mécanismes déviatoires monotones

$$\frac{\partial \mathbf{LF}_k^m}{\partial \sigma_{ij}^+} = \frac{(S_k)_{ij}}{2q_k} + \frac{M}{2} (r_k^m) \left( 1 - b \left( 1 + \ln \left( \frac{p_k}{P_c(\epsilon_v^p)} \right) \right) \right) (I_k)_{ij} \quad (9.29)$$

■ Mécanismes déviatoires cycliques

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{LF}_k^c}{\partial \sigma_{ij}^+} &= \frac{(S_k^c)_{ij}}{2q_k^c} + \frac{M}{2} \left( 1 - b \left( 1 + \ln \left( \frac{p_k}{P_c(\epsilon_v^p)} \right) \right) \right) \\ &\left( r_k^c - \left( (X_k^H)_{rs} + (t_k^H)_{rs} r_k^c \right) \frac{(S_k^c)_{rs}}{2q_k^c} \right) (I_k)_{ij} \end{aligned} \quad (9.30)$$

○ Mécanismes isotropes

■ Mécanisme isotrope monotone

$$\frac{\partial \mathbf{LF}_4^m}{\partial \sigma_{ij}^+} = \frac{1}{3} \frac{p}{|p|} I_{ij} \quad (9.31)$$

■ Mécanismes isotropes cycliques

$$\frac{\partial \mathbf{LF}_4^m}{\partial \sigma_{ij}^+} = \frac{1}{9} \frac{p}{|p|} \frac{p^c}{|p^c|} I_{ij} \quad (9.32)$$

• **Calcul des composantes**  $\frac{\partial \mathbf{LF}_k^K}{\partial \epsilon_v^p}$  **(scalaire) :**

○ Mécanismes déviatoires

■ Mécanismes déviatoires monotones

$$\frac{\partial \mathbf{LF}_k^m}{\partial \epsilon_v^p} = -\beta M b p_k r_k^m \quad (9.33)$$

■ Mécanismes déviatoires cycliques

$$\frac{\partial \mathbf{LF}_k^c}{\partial \epsilon_v^p} = -\beta M b p_k \left( r_k^c - \frac{(S_k^c)_{ij}}{2q_k^c} \left( (X_k^H)_{ij} + (t_k^H)_{ij} r_k^c \right) \right) \quad (9.34)$$

○ Mécanismes isotropes

■ Mécanisme isotrope monotone

$$\frac{\partial \mathbf{LF}_4^m}{\partial \epsilon_v^p} = -d \beta P_c(\epsilon_v^p) r_4^m \quad (9.35)$$

■ Mécanismes isotropes cycliques

$$\frac{\partial \mathbf{LF}_4^c}{\partial \epsilon_v^p} = -d \beta P_c(\epsilon_v^p) \left( \frac{p^c}{|p^c|} X_4^H + r_4^c \right) \quad (9.36)$$

• Calcul des composantes  $\frac{\partial \mathbf{LF}_k^K}{\partial r_k^K}$  (scalaire) :

◦ Mécanismes déviatoires

■ Mécanismes déviatoires monotones

$$\frac{\partial \mathbf{LF}_k^m}{\partial r_k^m} = M p_k \left( 1 - b \ln \left( \frac{p_k(\sigma)}{P_c(\epsilon_v^p)} \right) \right) \quad (9.37)$$

■ Mécanismes déviatoires cycliques

$$\frac{\partial \mathbf{LF}_k^c}{\partial r_k^c} = M p_k \left( 1 - b \ln \left( \frac{p_k(\sigma)}{P_c(\epsilon_v^p)} \right) \right) \left( 1 - \frac{(S_k^c)_{ij} (t_k^H)_{ij}}{2 q_k^c} \right) \quad (9.38)$$

◦ Mécanismes isotropes

$$\frac{\partial \mathbf{LF}_4^K}{\partial r_4^K} = d P_c(\epsilon_v^p) \quad (9.39)$$

• Calcul des composantes  $\frac{\partial \mathbf{LF}_k^K}{\partial \lambda_k^K}$  (scalaire) :

Les dérivées sont nulles pour tous les mécanismes du modèle.

### 9.2.5 Notation des tenseurs, invariants et diverses dérivées

Pour plus de facilités, on se place dans la base orthonormée  $(e_1, e_2, e_3)$  de l'espace à 3 dimensions. On définit le tenseur identité d'ordre 2, en utilisant la notation de Walpole-Cowin :

$$I_{ij} = \delta_{ij} e_i \otimes e_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.40)$$

Pour chaque mécanisme dans le plan  $k$ , on définit la pression isotrope  $p_k(\sigma)$ , la contrainte déviatoire  $q_k(\sigma)$  et le tenseur des contraintes déviatoires  $(S_k)_{ij}$  :

$$\begin{cases} p_k(\sigma) &= \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_k) \\ (S_k)_{ij} &= (\sigma_k)_{ij} - p_k(\sigma) (I_k)_{ij} \\ q_k(\sigma) &= \|(S_k)(\sigma)\|_{VM}^{2D} \\ \|(S_k)(\sigma)\|_{VM}^{2D} &= \frac{1}{2} \sqrt{((\sigma_k)_{11} - (\sigma_k)_{22})^2 + 4(\sigma_k)_{12}^2} \end{cases} \quad (9.41)$$

On définit de plus les tenseurs identité d'ordre 2 (pour chaque plan) :

$$\begin{cases} (I_k)_{ij} &= \delta_{i_k j_k} e_{i_k} \otimes e_{j_k} \\ I_{ij} &= \delta_{ij} e_i \otimes e_j \\ i_k &= 1 + \text{mod}(k, 3) \\ j_k &= 1 + \text{mod}(k+1, 3) \end{cases} \quad (9.42)$$

Ci-dessous, on retrouve l'expression de dérivées intervenant à plusieurs reprises pour le calcul de la matrice jacobienne locale par exemple :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{rs}} &= I_{ijrs} \\ \frac{\partial p}{\partial \sigma_{rs}} &= \frac{1}{3} I_{rs} \\ \frac{\partial p_k}{\partial \sigma_{rs}} &= \frac{1}{2} (I_k)_{rs} \\ \frac{\partial q_k}{\partial (S_k)_{rs}} &= \frac{1}{2 q_k} (S_k)_{rs} \\ \frac{\partial (S_k)_{ij}}{\partial \sigma_{rs}} &= (\text{Dev}_k)_{ijrs} \end{cases} \quad (9.43)$$

On remarque de plus que  $(\text{Dev}_k)_{ijrs} (S_k)_{rs} = (S_k)_{ij}$ .

Pour les quantités mises en jeu avec les mécanismes déviatoires, les relations suivantes permettent de donner l'expression de différentes dérivées :

$$\begin{cases} \frac{\partial q_k^c}{\partial (S_k^c)_{rs}} = \frac{(S_k^c)_{rs}}{2q_k^c} \\ \frac{\partial (S_k^c)_{ij}}{\partial \sigma_{rs}} = (\text{Dev}_k)_{ijrs} - \frac{F(\sigma, \epsilon_v^p) - bM}{2} \left( (X_k^H)_{ij} + (t_k^H)_{ij} r_k^c \right) (I_k)_{rs} \end{cases} \quad (9.44)$$

On remarque de plus que  $(\text{Dev}_k)_{ijrs} (S_k^c)_{rs} = (S_k^c)_{ij}$ .

On utilise la notation de Walpole-Cowin des tenseurs d'ordre 2 et 4.

$$(S_k)_{ij} = \begin{pmatrix} S_{i_k i_k} \\ S_{j_k j_k} \\ \sqrt{2} S_{i_k j_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{i_k i_k} \\ -S_{i_k i_k} \\ \sqrt{2} S_{i_k j_k} \end{pmatrix}; \quad (I_k)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^{(k)}; \quad (\text{Dev}_k)_{ijrs} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (9.45)$$

On obtient également :

$$(S_k)_{ij} (S_k)_{rs} = \begin{pmatrix} S_{i_k i_k}^2 & -S_{i_k i_k}^2 & \sqrt{2} S_{i_k i_k} S_{i_k j_k} \\ -S_{i_k i_k}^2 & S_{i_k i_k}^2 & -\sqrt{2} S_{i_k i_k} S_{i_k j_k} \\ \sqrt{2} S_{i_k i_k} S_{i_k j_k} & -\sqrt{2} S_{i_k i_k} S_{i_k j_k} & 2 S_{i_k j_k}^2 \end{pmatrix} \quad (9.46)$$

$$(S_k)_{ij} (I_k)_{rs} = \begin{pmatrix} S_{i_k i_k} & S_{i_k i_k} & 0 \\ -S_{i_k i_k} & -S_{i_k i_k} & 0 \\ \sqrt{2} S_{i_k j_k} & \sqrt{2} S_{i_k j_k} & 0 \end{pmatrix} \quad (9.47)$$

$$(I_k)_{ij} (I_k)_{rs} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.48)$$

### 9.3 Essai cyclique induisant une rotation de l'état de contraintes

L'essai réalisé s'appuie sur les essais expérimentaux réalisés par Pradel et al. (1990) sur le sable de Toyoura. Ces essais permettent de mettre en évidence l'effet de la rotation des axes principaux des contraintes sur les courbes réponses du matériau et l'importance du rôle joué par l'anisotropie.

Dans le cadre de leurs essais, Pradel et al. se sont intéressés au point d'entrée en plasticité de matériaux lâche ( $DR=32\%$ ) et dense ( $DR=70\%$ ) suivant différents chemins de chargement. Pour l'ensemble des essais réalisés, une pression de confinement effective initiale est fixée à une valeur de 98,1 kPa.

L'appareil utilisé durant ces essais est un appareil de cisaillement en torsion (présenté sur l'illustration 9.1). L'appareil permet un contrôle de la force axiale et de torsion. Le cylindre de l'échantillon utilisé à un rayon intérieur de 30 mm, extérieur de 50 mm et une hauteur de 193 mm. L'état de contraintes dans l'échantillon est présenté sur l'illustration 9.2.

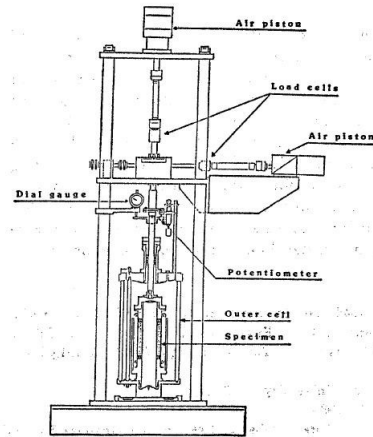


Illustration 9.1 : Appareil de cisaillement en torsion (Pradel et al. (1990))

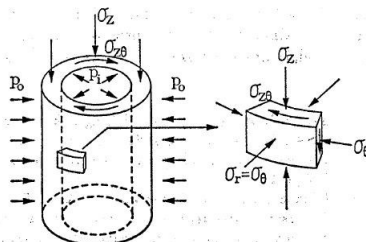


Illustration 9.2 : État de contraintes dans l'échantillon durant les essais

Le principe des chemins de chargement suivis est montré sur la figure 9.3. Il a été utilisé pour caractériser l'enveloppe de la surface de charge plastique des sables. Ce chemin de contraintes consiste dans un premier temps à garder une direction des axes principaux des contraintes fixe à un angle donné  $\alpha_\sigma$ . Ensuite une rotation des axes des contraintes avec un angle  $\Delta\alpha_\sigma=15$  degrés est appliquée, suivie d'un rechargement le long de la direction  $\alpha_\sigma + \Delta\alpha_\sigma$ .

Le test mené reprend la configuration  $2\alpha_\sigma=90$  degrés en utilisant un sable dense de Toyoura.

Les essais ont été réalisés en contrôlant les contraintes verticales et les contraintes de cisaillement effectives tout en maintenant une valeur constante pour  $\sigma_r = \sigma_\theta$ .

Le chemin suivi et les valeurs utilisées numériquement sont identiques à celles des essais expérimentaux.

Les propriétés matériaux ont été calibrées à partir des résultats de la thèse de Costa

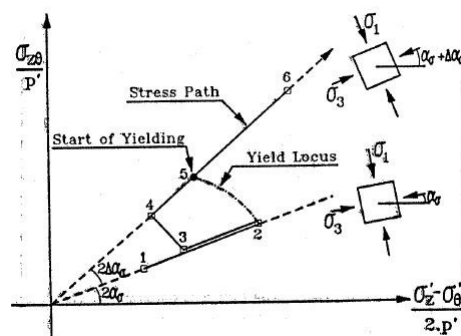


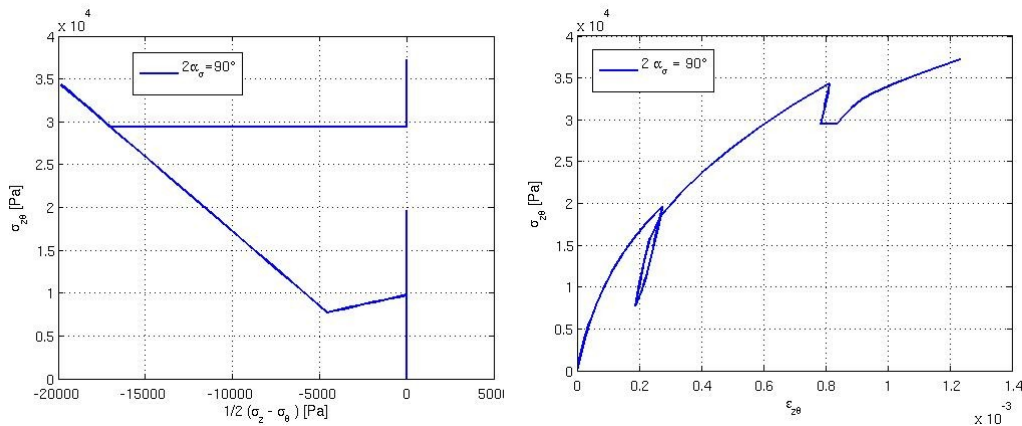
Illustration 9.3 : Trajet de chargement suivi pour caractériser la surface de charge (Pradel et al. (1990))

D'Aguiar (2008).

PARAMETRES	TOYOURA DR=70%	PARAMETRES	TOYOURA DR=70%
$P_0(kPa)$	-98.1	<b>ETAT CRITIQUE + PLASTICITE PAR-FAITE</b>	
<b>ELASTICITE</b>		$\phi$	32
$K(MPa)$	296	$\beta$	50
$G(MPa)$	222	$d$	3,5
$n^e$	0,4	$b$	0,22
$P_{ref}(MPa)$	-1	$P_{C0}(MPa)$	-3,5
<b>LOI D'ECOLEMENT + ECROUISSAGE</b>		<b>SEUIL DES DOMAINES</b>	
$\psi$	32	$r_{d,mon}^{ela}$	0,005
$a_{mon}$	0,010	$r_{d,cyc}^{ela}$	0,005
$a_{cyc}$	0,0001	$r_{hys}$	0,03
$c_{mon}$	0,06	$r_{mob}$	0,8
$c_{cyc}$	0,03	$r_{iso}^{ela}$	0,0001
$x^m$	1	$\alpha$	1,5

**Tableau 9.2 : Propriétés matériau du sable de Toyoura à DR=70% établies par Costa D'Aguiar (2008)**

Les résultats obtenus lors de cet essai sont présentés sur l'illustration 9.4 dans les plans  $\left(\frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{2}, \sigma_{\theta z}\right)$  et  $(\epsilon_{\theta z}, \sigma_{\theta z})$ .



**Illustration 9.4 : Réponse du modèle de Hujeux pour l'essai à  $2\alpha_\sigma=90$  degrés sur sable de Toyoura dense dans les plans  $\left(\frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{2}, \sigma_{\theta z}\right)$  et  $(\epsilon_{\theta z}, \sigma_{\theta z})$**

L'intérêt de cet essai dans le cadre de ce travail porte sur la rotation des axes

principaux de l'état de contrainte sollicitant les mécanismes cycliques déviatoires du modèle de Hujeux. En effet, l'ensemble des essais préalablement réalisés tels que les essais triaxiaux ou biaxiaux monotones ou cycliques n'introduisent pas de rotation des axes principaux. La valeur de la fonction  $\gamma_k^c$  (définie à l'équation 3.27) est constante pour ces chemins de chargement. Seule la rotation des axes principaux de l'état de contraintes permet de faire varier la fonction  $\gamma_k^c$  et d'en caractériser son évolution.





## 9.4 Essai biaxial drainé sur sable d'Hostun

### 9.4.1 Modèle élément fini

Un essai biaxial drainé simule un essai de laboratoire où la pression interstitielle est supposée rester constante durant l'essai. L'essai est modélisé par conséquent en mécanique pure en configuration 2D, les déformations hors-plan étant supposées nulles. Un chargement constant de compression est maintenu sur les parois latérales de l'échantillon. Un écrasement axial est imposé en tête de l'échantillon par déplacement. Les champs de contraintes et de déformations sont homogènes dans l'échantillon durant l'intégralité de l'essai.

Lors des simulations avec Code\_Aster, l'essai biaxial est effectué sur un unique élément fini isoparamétrique de forme carrée QUAD8, à huit nœuds, intégré sur 9 points de Gauss. La longueur de chaque arête est prise égale à l'unité, 1 m. Le maillage utilisé pour cet essai est présenté sur l'illustration 9.5. Dans le modèle considéré, l'élément carré représente un quart de l'échantillon. Les conditions aux limites sont donc les suivantes :

- Conditions de symétrie :
  - $U_y = 0$  à la base de l'échantillon ;
  - $U_x = 0$  sur la paroi latérale gauche de l'échantillon.
- Conditions de pression latérale sur la paroi latérale droite ;
- Conditions de chargement axial par déplacement successif jusqu'à  $U_y = -0.5$  m, correspondant à 50 % de déformations axiales.

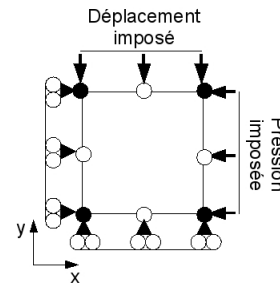


Illustration 9.5 : Géométrie et conditions aux limites appliquées pour un essai biaxial drainé

Le chargement d'écrasement axial est imposé en tête de l'échantillon, après avoir affecté un état de contrainte isotrope dans l'échantillon  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -30 \text{ kPa}$ , à l'équilibre avec la pression latérale imposée sur les bords libres.

Les propriétés matériaux utilisées pour représenter le comportement d'un sable d'Hostun moyennement dense à  $DR = 40\%$  sont précisées dans le tableau 9.3.

Pour rappel, la densité relative d'un matériau sableux est donnée par la relation suivante :

$$DR(\%) = \frac{e_{\max} - e_0}{e_{\max} - e_{\min}} \quad (9.1)$$

où  $e_{\max}$ ,  $e_{\min}$  et  $e_0$  désignent l'indice des vides maximum, minimum et initial.

Les termes  $\rho_s$ ,  $\rho_e$ ,  $B$ ,  $\nu$ ,  $K^{\text{int}}$  et  $K^e$ , introduits dans le tableau 9.3, sont définis comme suit :

- $\rho_s$  : masse volumique du squelette,
- $\rho_e$  : masse volumique de l'eau,
- $B$  : nombre de Biot,
- $\nu$  : viscosité du milieu poreux,
- $K^{\text{int}}$  : perméabilité intrinsèque,
- $K^e$  : coefficient de compressibilité de l'eau.

Propriétés matériaux	SABLE	Propriétés matériaux	SABLE	Propriétés matériaux	SABLE
<b>Modèle de Hujoux</b>		<b>Loi d'écoulement + Écrouissage isotrope</b>		<b>Propriétés hydrauliques</b>	
<b>Confinement isotrope initial</b>		$\psi$	33	$\rho_s$ [ $kg/m^3$ ]	2700
$P_0$ [ $MPa$ ]	-0,03	$a_{mon}$	0,008	$\rho_e$ [ $kg/m^3$ ]	1000
<b>Élasticité</b>		$a_{cyc}$	0,0001	$B$	1,0
$K$ [ $MPa$ ]	516,2	$c_{mon}$	0,2	$\nu$	$10^{-3}$
$G$ [ $MPa$ ]	238,2	$c_{cyc}$	0,1	$K^{\text{int}}$ [ $m^3/kg/s$ ]	$10^{-8}$
$n_e$	0,4	$x_m$	1	$H_w$ [ $Pa^{-1}$ ]	$10^{-10}$
$P_{ref}$ [ $MPa$ ]	-1,0	<b>Seuil des domaines</b>		porosité	0,425
<b>État critique + Plasticité parfaite</b>		$r_{ela}^d$	0,005		
$\phi$	33	$r_{ela}^{iso}$	0,001		
$\beta$	24	$r_{hys}$	0,05		
$d$	2,5	$r_{mob}$	0,90		
$b$	0,2	$\alpha$	1,0		
$P_{c0}$ [ $MPa$ ]	-1,0				

**Tableau 9.3 : Propriétés matériaux utilisées établis par Lopez-Caballero et al. (2003b)**

### 9.4.2 Résultats de l'étude

L'ensemble des résultats présentés sont issus du logiciel Code\_Aster, en supprimant la possibilité à l'algorithme local d'intégration d'effectuer des sous-incréments du chargement, selon les critères énoncés aux équations 4.5 et 4.25. Ces critères établis au §4.2 et §4.3.4 sont inactifs, dans le but de tester la capacité première des développements effectués pour intégrer le modèle de Hujoux suivant un schéma purement implicite.

La convergence du système non linéaire local est considérée acquise pour un résidu inférieur à  $10^{-8}$  et la convergence au niveau global pour un résidu inférieur à  $10^{-8}$ .

### 9.4.2.1 Précision des résultats

Les résultats présentés ci-dessous reprennent les réponses du logiciels Code\_Aster pour différents niveaux d'incrément de chargement. Ces résultats sont exprimés dans le plan de contraintes  $(p', q)$  (illustration 9.7a), le plan mixte  $(\epsilon_{yy}, q)$  (illustration 9.6), le plan  $(\epsilon_{yy}, \epsilon_v)$  (illustration 9.7b) et le plan  $(\epsilon_{yy}, r_k^{dev})$  (illustration 9.8). Les incréments de chargement  $\epsilon_{yy}$  utilisés sont  $[0,1\%, ; 0,05\%; 0,01\%; 0,005\%; 0,001\%]$ . Pour des valeurs d'incrément de chargement supérieur, l'algorithme local d'intégration du modèle de Hujieux diverge.

Le matériau considéré à ce taux de confinement initial montre un comportement dilatant avec un pic en contrainte déviatoire pour  $\epsilon_{yy}=5\%$ . Ce chemin de chargement sollicite pour le modèle de Hujieux les trois mécanismes déviatoires et le mécanisme isotrope. Au cours du chargement ( $\epsilon_{yy} \approx 10\%$ ), une décharge apparaît pour le mécanisme hors-plan de normale  $y$ , qui indique une réduction (en valeur absolue) de la contrainte normale au plan de l'essai,  $\sigma_{zz}$  (évolution du rayon déviatoire cyclique  $r_x^c$ , illustration 9.8).

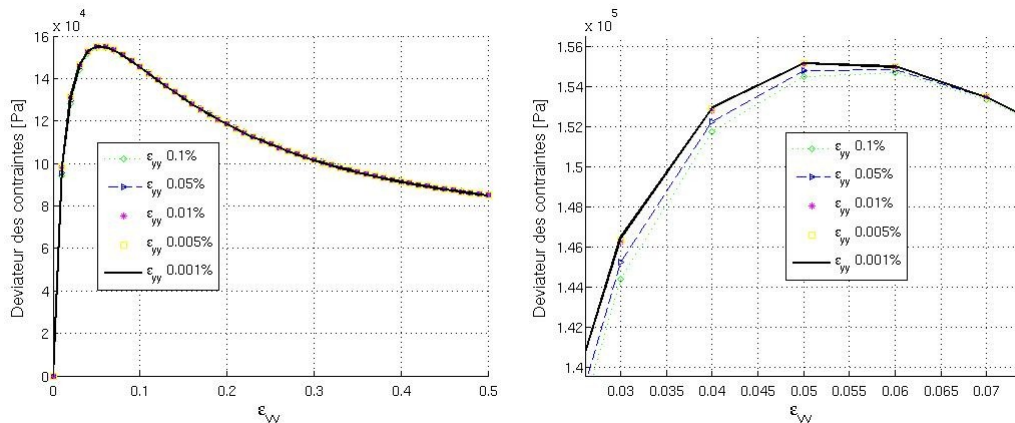


Illustration 9.6 : Réponse du modèle de Hujieux à un chemin biaxial drainé dans le plan  $(\epsilon_{yy}, q)$  pour un sable d'Hostun avec  $\sigma_{xx} = -30 \text{ kPa}$

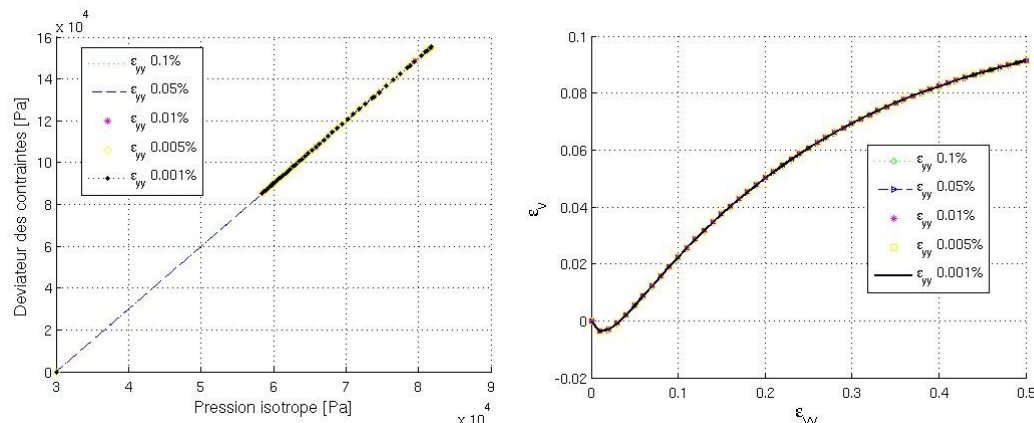


Illustration 9.7 : Réponse du modèle de Hujieux à un chemin biaxial drainé dans les plans pour un sable d'Hostun avec  $\sigma_{xx} = -30 \text{ kPa}$

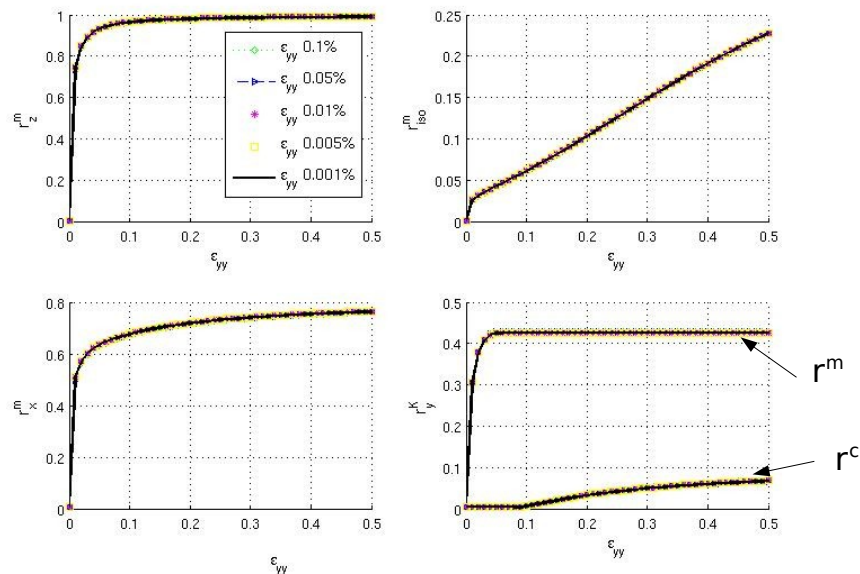


Illustration 9.8 : Évolution des rayons déviatoires et isotropes du modèle de Hujieux pour un sable d'Hostun avec  $\sigma_{xx} = -30 \text{ kPa}$

La gamme d'incrément de chargement utilisée permet de montrer une très légère dépendance des résultats à ces incréments. Lorsque l'algorithme itératif local converge, les résultats apparaissent précis et peu sensibles aux incréments de chargement. L'illustration 9.9 présente l'évolution de la contrainte déviatoire au pic de contrainte  $q$  en fonction du nombre d'incrément nécessaires pour mener l'essai jusqu'à  $\epsilon_{yy} = 50\%$ . L'erreur relative maximum est inférieure à 0,4% et l'évolution du maximum de  $q$  est strictement monotone en fonction du nombre d'incrément utilisés. La précision de l'approche implicite est remarquable et garantit pour les niveaux de chargement les plus forts un intervalle de tolérance très faible.

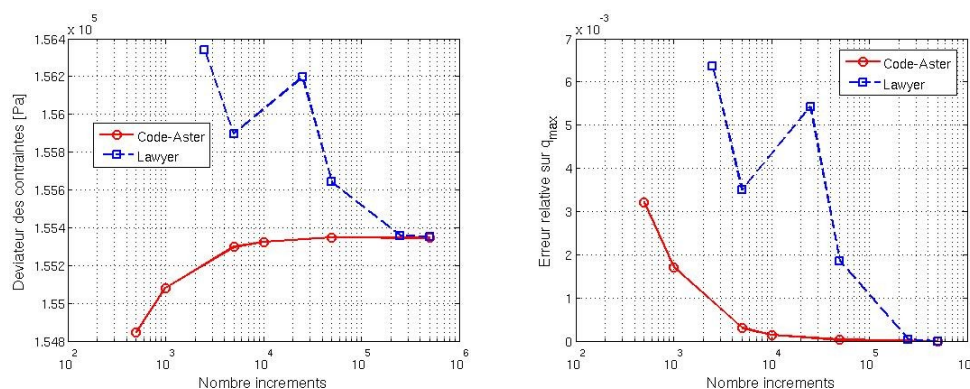


Illustration 9.9 : Valeur au pic de contrainte déviatoire (gauche) et erreur relative sur le pic de contrainte (droite) en fonction de la discrétisation imposée

En superposition des résultats fournis par Code\_Aster, les lignes bleues discontinues avec des carrés représentent l'évolution du maximum du déviateur  $q$  en fonction du nombre d'incrément demandés pour le logiciel Lawyer. Les

résultats de Lawyer sont établis en laissant la possibilité à l'algorithme local d'effectuer un redécoupage local à hauteur de 100 et également la possibilité de poursuivre le calcul sans avoir obtenu convergence. Pour des critères plus serrés, l'algorithme implanté dans Lawyer n'est pas en mesure de fournir de résultats complets.

La convergence de l'algorithme explicite avec sous-incrémentations ne présente pas un profil monotone de convergence. On constate également que pour obtenir une précision équivalente sur le déviateur maximal de l'ordre de 0,2% , il est nécessaire d'appliquer un facteur de raffinement égal à 50 . Néanmoins, lorsque la convergence est établie pour les deux algorithmes, les résultats sont très proches pour l'ensemble des variables d'état du modèle.

#### 9.4.2.2 Convergence locale

L'étude de la convergence locale du modèle de comportement est équivalente à l'étude de l'algorithme local de Newton servant à résoudre le système non linéaire des équations du modèle. Deux regards sur le comportement de cet algorithme sont portés au cours du chargement. L'ensemble des résultats présentés ci-dessous sont établis à partir de la simulation réalisée pour des incréments de chargement  $\Delta \epsilon_{yy} = 0,1\%$  . La convergence locale est considérée acquise lorsque  $\|R(\Delta Y_{j+1})\| \leq 10^{-8}$  (équation 4.22 du §4.3.3.4 ).

Au premier incrément de chargement et après  $\epsilon_{yy} = 8\%$  , le modèle de Hujeux compte deux mécanismes déviatoires monotones et le mécanisme isotrope monotone actifs. Le système non linéaire à résoudre est donc composé de treize équations :

- six équations pour l'équilibre des équations d'état,  $(\mathbf{LE})_{ij}$  ,
- une équation pour l'évolution de la déformation volumique plastique,  $(\mathbf{LEVP})$  ,
- trois équations portant sur l'évolution des degrés de mobilisation des différents mécanismes actifs,  $(\mathbf{LR}_k^K)$  ,
- trois équations pour le respect des seuils de plasticité,  $(\mathbf{LF}_k^K)$  .

Les composantes de contraintes de cisaillement ne sont pas représentées, car elles n'interviennent pas durant un essai biaxial drainé.

Au premier incrément de chargement, les évolutions locales les plus fortes se reportent sur les rayons des mécanismes déviatoires, les contraintes et la déformation volumique plastique. La convergence locale du système d'équations est obtenue en quatre itérations, valeur relativement faible.

Les résidus portés par les contraintes, la déformation volumique plastique et les rayons déviatoires suivent une évolution relativement homogène de pente faible, tandis que les résidus relatifs au mécanisme isotrope suivent une évolution plus forte vers la solution convergée (illustration 9.11). On remarque également que l'équilibre des seuils des différents mécanismes est atteint plus rapidement que pour les autres équations du système non linéaire à résoudre. Cette différence peut s'expliquer par la « concentration » de non-linéarité pour les équations d'état  $(\mathbf{LE})_{ij}$  et l'évolution de la variable de couplage  $(\mathbf{LEVP})$  .

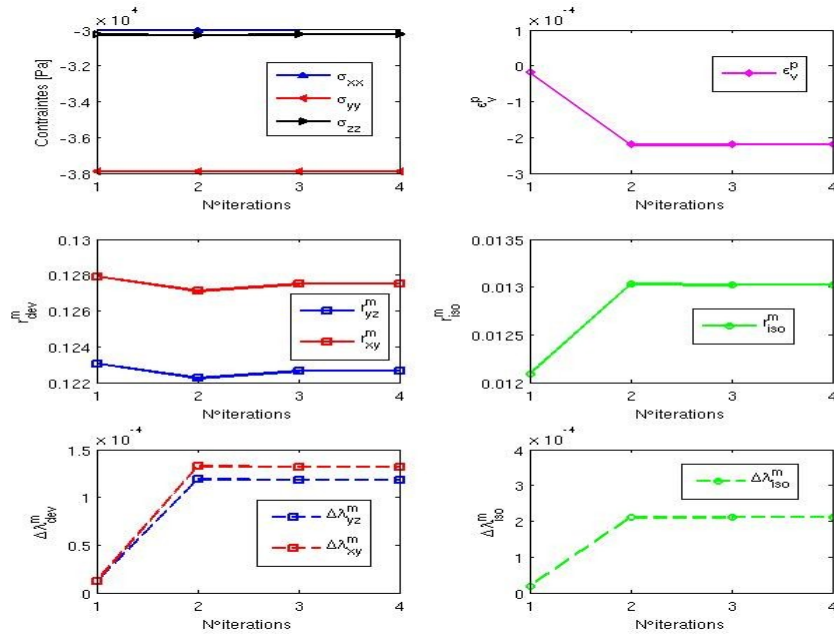


Illustration 9.10 : Évolution des variables locales pendant l'intégration du modèle de Hujeux pour le premier incrément de chargement

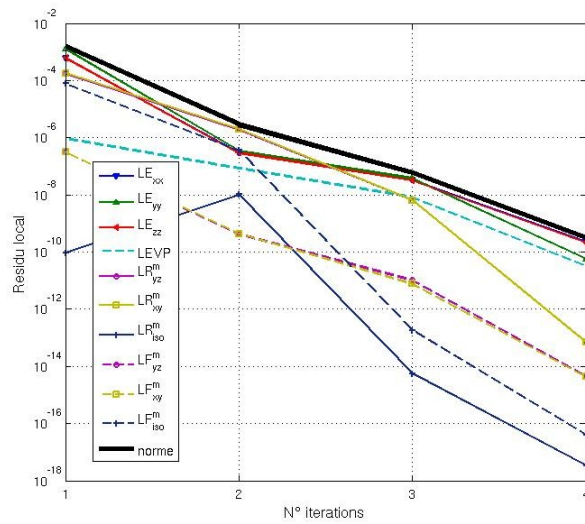


Illustration 9.11 : Évolution du résidu de l'algorithme de résolution local au 1<sup>er</sup> incrément de chargement

Après 8% de déformations axiales (phase d'adoucissement du matériau), la convergence du système est obtenue après cinq itérations locales. La contribution des rayons déviatoires est beaucoup moins forte pour ce niveau de chargement et leur évolution beaucoup plus faible. Ce point est confirmé par l'illustration 9.13, où les résidus sont beaucoup plus forts pour les équations relatives aux contraintes et à la déformation volumique plastique. L'ensemble des résidus suivent une évolution

relativement stable. Les taux de convergence sont néanmoins plus forts pour les équations portant sur les rayons et les surfaces de charge. Sur l'illustration 9.12, on constate une différence importante entre les valeurs des multiplicateurs plastiques. Le mécanisme actif dans le plan de chargement,  $(x, y)$ , est prépondérant à cet instant du chargement.

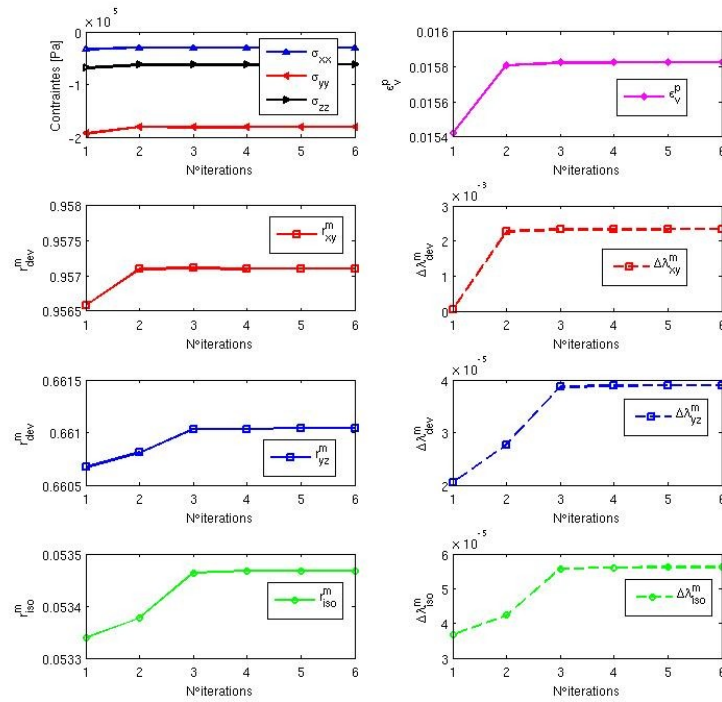


Illustration 9.12 : Évolution des variables locales pendant l'intégration du modèle de Hujeux à  $\epsilon_{yy} = 8\%$  (phase d'adoucissement)

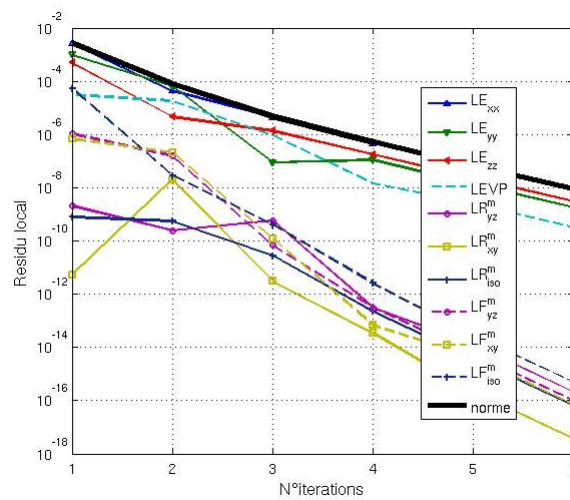


Illustration 9.13 : Évolution du résidu de l'algorithme de résolution local au premier incrément de chargement



### 9.4.2.3 Convergence globale

Ce paragraphe s'attache à observer le comportement de l'algorithme de résolution globale portant sur l'équilibre mécanique du problème aux limites posé. Ce comportement est conditionné par la qualité de l'opérateur tangent local défini au niveau du modèle de comportement. L'opérateur tangent disponible pour le modèle de Hujeux n'est pas l'opérateur tangent consistant avec le schéma d'intégration implicite mis en place. Le taux de convergence quadratique de l'algorithme est seulement assuré pour des incréments de chargement faibles. L'illustration 9.14 confirme ce point et le taux de convergence se dégrade avec l'augmentation de la valeur des incréments de chargement.

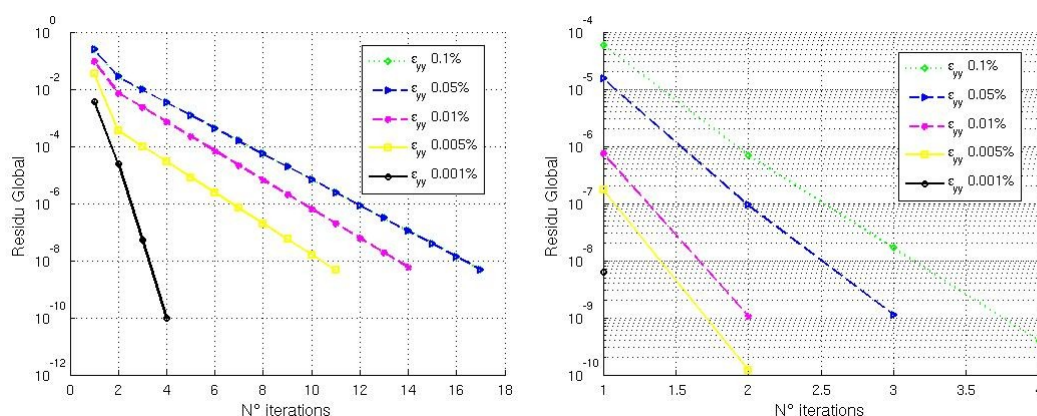
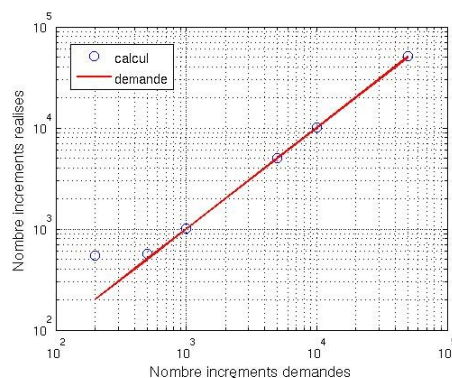


Illustration 9.14 : Évolution du résidu global au premier incrément de chargement (gauche - a) et après  $\epsilon_{yy} = 8\%$  (droite - b) pour un sable d'Hostun à  $\sigma_{xx} = -30 \text{ kPa}$

Au premier incrément de chargement commun à chaque discrétisation imposée, le taux de convergence globale ne respecte pas une pente quadratique vers la solution sauf pour le taux d'incrément le plus faible,  $\Delta\epsilon_{yy} = 0,001\%$  (illustration 9.14a). Les premiers incréments apparaissent difficiles à intégrer puisque pour le taux d'incrément égal à  $\Delta\epsilon_{yy} = 0,1\%$ , un sous-découpage du chargement s'avère nécessaire (l'évolution portant sur les rayons déviatoires  $y$  est très importante). Les courbes de convergence sont donc confondues pour les valeurs d'incrément de  $\Delta\epsilon_{yy} = 0,1\%$  et  $\Delta\epsilon_{yy} = 0,05\%$ . Le profil de convergence suit une pente faible pour l'ensemble des incréments de déformations supérieurs à  $\Delta\epsilon_{yy} > 0,001\%$ .

Après  $\epsilon_{yy} = 8\%$  (phase d'adoucissement du comportement du matériau), le taux de convergence suivi pour les différentes valeurs d'incrément évolue régulièrement en fonction de ces mêmes valeurs d'incrément de chargement. Le taux de convergence quadratique semble atteint pour  $\Delta\epsilon_{yy} \leq 0,01\%$  (illustration 9.14b).



L'illustration 9.10 permet de représenter, en fonction du nombre d'incrément d'incrément réalisés en fonction du nombre d'incrément demandés

demandés, le nombre réel d'incrémentes réalisés par le code de calcul. En effet, lors de la modélisation de l'essai, un sous-découpage automatique a été mis en place pour permettre en cas d'échec d'intégration locale ou en cas de divergence de l'algorithme de Newton-Raphson global une poursuite de l'essai. Les résultats montrent que pour un nombre d'incrémentes égal à 200, correspondant à  $\Delta \epsilon_{yy} = 0,25\%$ , le nombre d'incrément effectués correspond à plus du double de la valeur initiale. En revanche, pour  $\Delta \epsilon_{yy} = 0,1\%$ , certes il subsiste des sous-découpages, mais le nombre obtenu est beaucoup plus proche du nombre d'incrémentes demandés.

### 9.4.3 Retour sur les résultats de l'essai biaxial drainé

Les premiers résultats obtenus avec le schéma d'intégration implicite sont très encourageants. Les valeurs retrouvées pour les variables d'état, telles que l'état de contraintes et les variables internes du modèle sont identiques entre les deux codes de calcul lorsqu'ils ont atteints respectivement la convergence de leurs résultats.

Pour ce trajet de chargement, le schéma d'intégration implicite a tout d'abord démontré sa capacité à obtenir lorsqu'il converge des valeurs précises pour les variables d'état. On a notamment relevé pour la valeur maximale au pic de contraintes, pour une précision de 0,2% d'erreur, un niveau d'incrémentes de chargement 50 fois plus large pour le schéma implicite que le niveau d'incrémentes appliqué au schéma explicite avec sous-incrémentes.

En revanche, pour des incrémentes de chargement trop importants, l'algorithme est mis en défaut. Il est alors nécessaire pour une utilisation industrielle dans le cadre d'études sur des structures géotechniques d'introduire des critères de sous-incrémentations afin d'assurer une convergence locale pour une gamme de chargement plus étendue (voir §4.2 et §4.3.4).

Dans le cadre de cet essai, la résolution du système d'équations non linéaires locales apparaît stable et monotone dans son ensemble. Le nombre d'itérations locales reste limité à 5 ce qui assure d'obtenir des résultats avec ce schéma dans un délai raisonnable.

Les qualités de l'opérateur tangent continu sont en accord avec nos attentes, puisque le taux de convergence quadratique est obtenu à partir d'une valeur de chargement appliquée à chaque incrément.



## 9.5 Essai triaxial non drainé cyclique

### 9.5.1 Modèle élément fini

Un essai triaxial non drainé cyclique consiste à appliquer sur un échantillon une succession de charge/décharge en tête (ou à la base) de l'échantillon. Le terme non-drainé précise que le flux hydraulique est nul aux frontières de l'échantillon. Cette succession de charge/décharge génère, pour les sols granulaires lâches, une montée de la pression hydraulique dans l'échantillon et conduit au phénomène de mobilité cyclique.

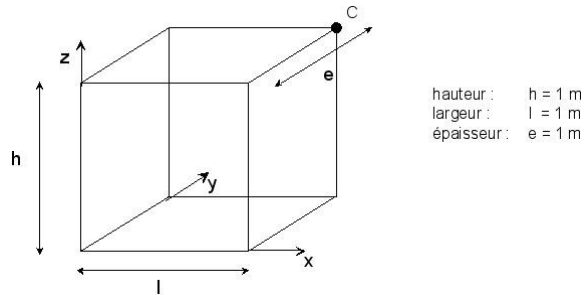


Illustration 9.16 : Maillage utilisé pour l'essai triaxial non drainé cyclique

Le maillage utilisé est un élément cubique HEXA20, intégré sur 27 points de Gauss, représentant  $1/8$  de l'échantillon (illustration 9.16).

Les propriétés matériaux utilisées sont présentées dans le tableau 9.3.

Les conditions aux limites appliquées aux bords de l'échantillon sont les suivantes : les déplacements sont bloqués sur les faces avant ( $u_y=0$ ), latérale gauche ( $u_x=0$ ) et inférieure ( $u_z=0$ ).

Le chargement appliqué durant l'essai est décrit comme suit. En maintenant sur les faces arrière et latérale droite une pression égale à  $P_0 = -30 \text{ kPa}$ , on applique un chargement alternatif en pression d'amplitude  $\Delta\sigma$  égale à  $15 \text{ kPa}$  sur la face supérieure, de façon à obtenir une variation de la contrainte verticale  $\sigma_{zz}$  dans l'échantillon comprise dans l'intervalle ( $-45 \text{ kPa} \leq \sigma_{zz} \leq -15 \text{ kPa}$  avec la convention de signe « - » pour la compression).

### 9.5.2 Résultats de l'étude

L'ensemble des résultats présentés, issus du logiciel Code\_Aster, ont été obtenus en interdisant à l'algorithme local d'intégration d'effectuer des sous-incréments du chargement, comme précisé au §9.4.

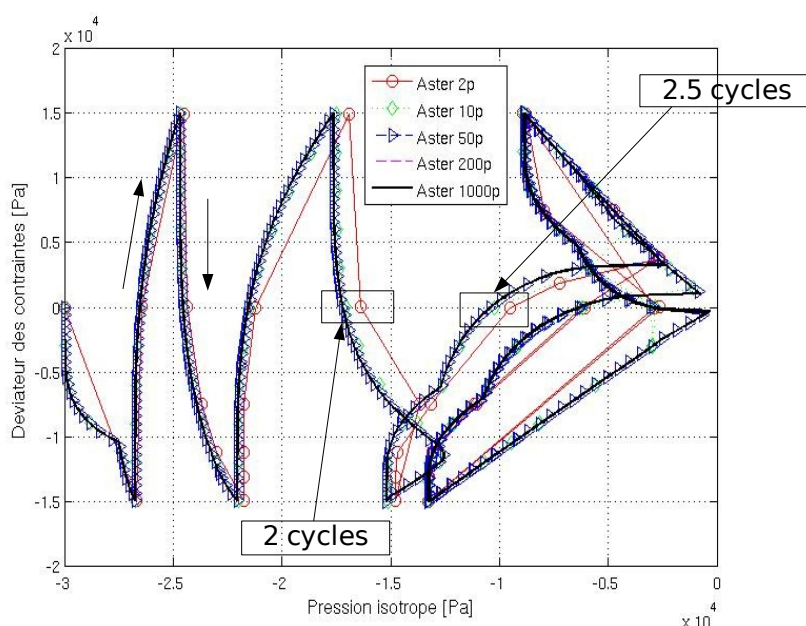
La convergence du système non linéaire local est considérée acquise pour un résidu inférieur à  $10^{-8}$  et la convergence au niveau global pour un résidu inférieur à  $10^{-8}$ .

### 9.5.2.1 Précision des résultats

Les résultats présentés ci-dessous reprennent les réponses des logiciels Code\_Aster et Lawyer pour différents niveaux d'incrément de chargement. Ces résultats sont exprimés dans le plan de contraintes  $(p', q)$  (illustration 9.17), le plan mixte  $(\epsilon_{zz}, q)$  (illustration 9.18) et en fonction des rayons déviatoires mobilisés<sup>8</sup> (illustration 9.19). Le tableau 9.4 permet de caractériser la nomenclature des essais réalisés :

$\Delta\sigma$ [Pa]	Code_Aster	Lawyer
15000	Aster 2p	Lawyer 2p
3000	Aster 10p	Lawyer10p
750		Lawyer 40p
600	Aster 50p	
300		Lawyer 100p
150	Aster 200p	
30	Aster 1000p	Lawyer 1000p

**Tableau 9.4 : Récapitulatif des incréments de chargement utilisés pour modéliser l'essai triaxial non drainé cyclique**



*Illustration 9.17 : Essai triaxial non drainé cyclique représenté dans le plan  $(p', q)$  modélisé avec Code\_Aster*

L'essai modélisé permet de représenter le comportement de liquéfaction du sol, caractérisé par une perte brutale de la résistance du matériau en début de troisième cycle de chargement (illustration 9.18).

<sup>8</sup> Les rayons déviatoires mobilisés sont définis comme suit  $r_k^{mob} = \left| \frac{q_k}{p_k F_k} \right|$

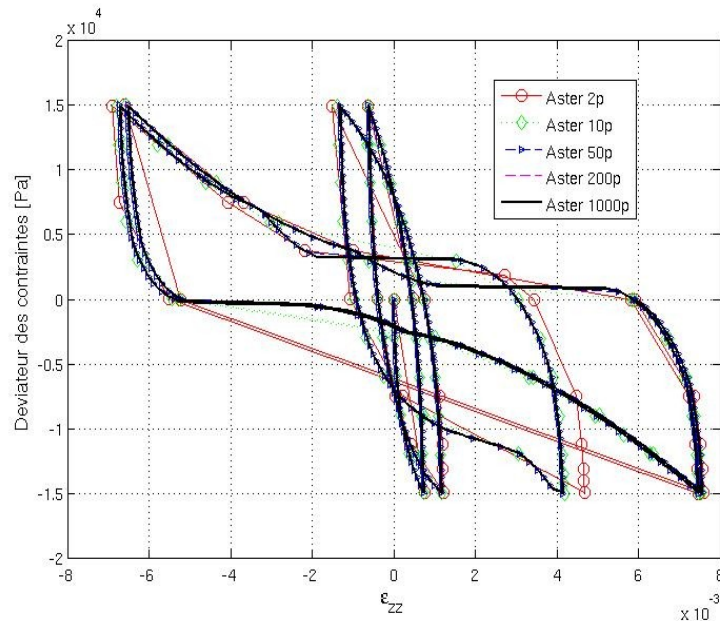


Illustration 9.18 : Essai triaxial non drainé cyclique représenté dans le plan  $(\epsilon_{zz}, q)$  modélisé avec Code\_Aster

L'évolution des rayons déviatoires mobilisés au cours de l'essai permet de constater un écouissage progressif des seuils déviatoires monotones. On constate tout de même que le phénomène de liquéfaction se produit avant d'atteindre l'état de plasticité parfaite ( $r_k^{mob} \leq 1$ ).

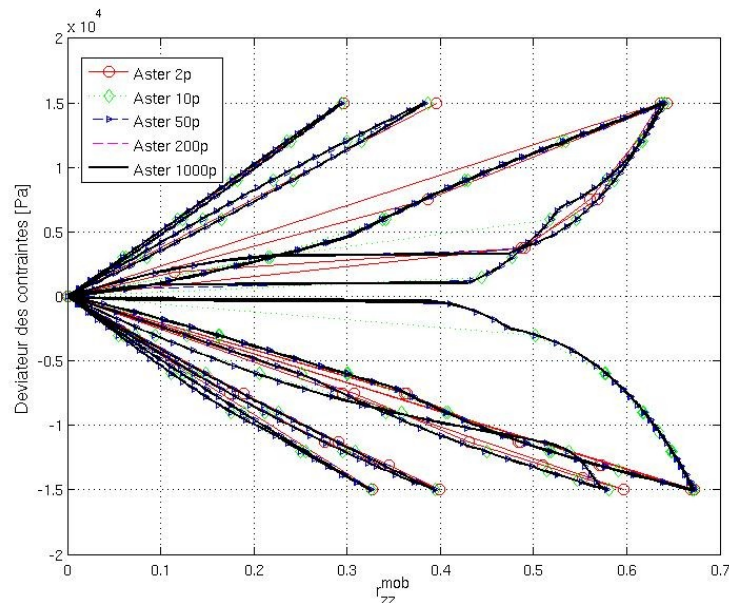


Illustration 9.19 : Essai triaxial non drainé cyclique - Évolution du rayon déviatoire mobilisé en fonction du déviateur de contrainte

On constate une sensibilité légère des résultats à la discrétisation du chargement imposé. Néanmoins, les résultats convergent régulièrement vers une valeur limite

au fur et à mesure du raffinement des incréments de chargement.

Une comparaison de ce comportement a été menée en parallèle avec le logiciel Lawyer et les conclusions apparaissent différentes. Les simulations ont été menées en laissant la possibilité à l'algorithme local explicite d'effectuer des redécoupages limités au nombre de 100. Les résultats de Lawyer sont également poursuivis en cas de non convergence locale. Sans ces artifices, Lawyer n'aurait pas été en mesure de produire ces résultats.

La convergence régulière des résultats vers une valeur figée ne s'observe pas pour le logiciel Lawyer. En revanche, les valeurs finales obtenues à convergence pour les deux codes sont très proches les unes des autres pour deux points distincts relevés durant l'essai. La comparaison est effectuée sur la valeur de la pression isotrope de l'échantillon après 2 cycles et 2,5 cycles, c'est à dire pour les valeurs de chargement où la valeur du déviateur des contraintes s'annule (voir illustration 9.17). Les résultats sont présentés sur l'illustration 9.20.

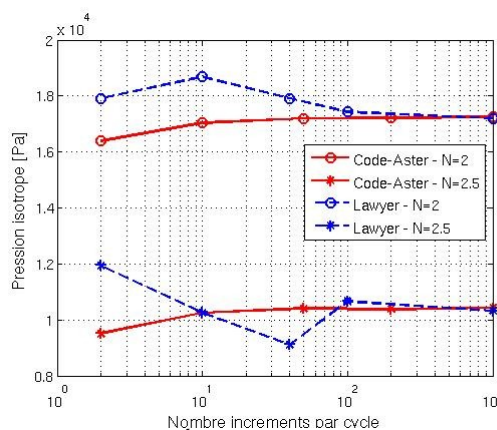


Illustration 9.20 : Évolution de la pression isotrope de l'échantillon en deux points de chargement en fonction de la discrétisation du chargement

Le nombre d'incrément précisé comme axe des abscisses de l'illustration 9.20 fait référence au nombre d'incrément par cycle de chargement durant l'essai (cf tableau 9.4). L'écart relatif observé en fonction du raffinement du chargement entre les deux codes est beaucoup plus serré pour le Code\_Aster. La précision de l'approche implicite est remarquable et garantit même pour les niveaux de chargement les plus forts un intervalle de tolérance très faible.

### 9.5.2.2 Convergence locale

L'étude de la convergence locale du modèle de comportement est équivalente à l'étude de l'algorithme local de Newton servant à résoudre le système non linéaire des équations du modèle. Différentes photos du comportement de cet algorithme sont prises au cours du chargement.

Après 2,5 cycles de chargement, le modèle de Hujeux compte deux mécanismes déviatoires cycliques et un mécanisme isotrope cyclique actifs. Le système non linéaire à résoudre est donc composé de treize équations :

- six équations pour l'équilibre des équations d'état,  $(\mathbf{LE})_{ij}$  ,
- une équation pour l'évolution de la déformation volumique plastique,  $(\mathbf{LEVP})$  ,
- trois équations portant sur l'évolution des degrés de mobilisation des



différents mécanismes actifs,  $(\mathbf{LR}_k^K)$ ,

- trois équations pour le respect des seuils de plasticité,  $(\mathbf{LF}_k^K)$ .

Le chargement appliqué est isotrope horizontalement. Le modèle de Hujeux est donc décrit par l'activation de deux mécanismes déviatoires à évolutions identiques ( $M_1^K$  et  $M_2^K$ ). Sur l'illustration 9.21, une seule composante horizontale est présentée  $(\mathbf{LE})_{xx}$ , de même qu'un seul degré de mobilisation déviatoire cyclique  $(\mathbf{LR}_{dev}^c)$ , et un unique seuil de plasticité pour les mécanismes déviatoires cycliques  $(\mathbf{LF}_{dev}^c)$ . Les composantes de contraintes de cisaillement ne sont pas représentées, car elles n'interviennent pas durant cet essai triaxial non drainé cyclique.

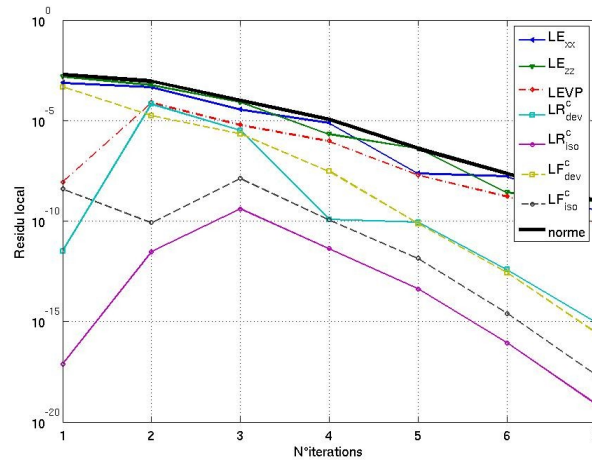


Illustration 9.21 : Convergence locale du modèle de Hujeux après 2,5 cycles de chargement

La limite de précision demandée à l'algorithme de Newton (fixée pour cet exemple à  $10^{-8}$ ) est atteinte en sept itérations locales. Les résidus relatifs aux équations d'état  $(\mathbf{LE})_{ij}$  et à la déformation volumique plastique  $(\mathbf{LEVP})$  montrent un taux de convergence inférieur à celui observé pour les équations  $(\mathbf{LR}_k^K)$  et  $(\mathbf{LF}_k^K)$ .

L'illustration 9.22 permet d'apprécier le taux de convergence des inconnues du système vers leurs valeurs finales.



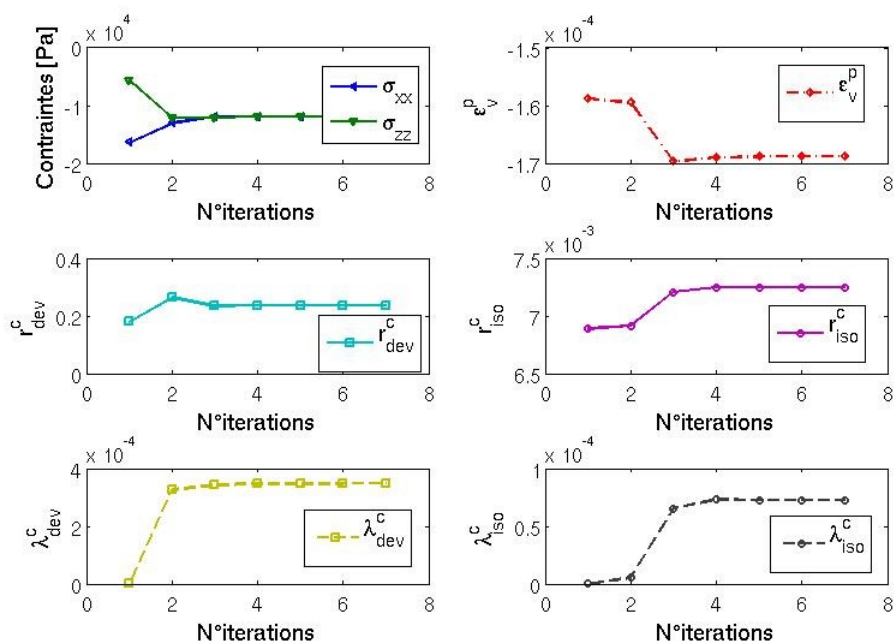


Illustration 9.22 : Convergence des inconnues locales du modèle de Hujeux après 2,5 cycles de chargement

Les résultats montrent une convergence rapide pour l'ensemble des inconnues du système après la troisième itération de corrections plastiques. Les corrections plastiques ne conduisent pas nécessairement à une évolution régulière et monotone des inconnues au cours des itérations, malgré la monotonie du chargement à cet instant du chargement.

Un regard sur des points de passage du chargement générant la création de nouveaux seuils cycliques est intéressant pour justifier et conforter les choix heuristiques réalisés au cours des développements pour l'intégration du modèle de Hujeux dans Code\_Aster. Il s'agit notamment du prédicteur élastique choisi après un premier échec local de l'intégration du modèle (cf §4.3.5).

L'instant de chargement analysé se situe à présent après 0,25 cycle de chargement, qui est le premier incrément de chargement conduisant à une décharge de l'échantillon. A l'instant de chargement précédent, deux mécanismes déviatoires monotones sont actifs et un mécanisme isotrope cyclique. Cette décharge doit conduire à initialiser puis écrouir des mécanismes déviatoires cycliques.

L'idée de l'analyse consiste à regarder l'évolution du domaine des mécanismes potentiellement actifs et la convergence locale du système d'équations non linéaires en fonction des prédicteurs de contraintes. Le focus se porte à la première itération de correction de l'équilibre global du système mécanique considéré.

La procédure de définition du domaine potentiel de mécanismes actifs,  $M^{pot}$ , propose le couple des deux mécanismes déviatoires monotones. On rappelle que ces deux mécanismes ont des évolutions identiques dues aux conditions de symétrie du chargement. La résolution du système local d'équations non linéaires conduit à obtenir des multiplicateurs plastiques négatifs pour les mécanismes déviatoires monotones. Le choix initial de ces mécanismes était donc erroné et il est

nécessaire d'y apporter des corrections.

Des mécanismes déviatoires cycliques sont donc considérés et intégrés dans  $M^{pot}$ . L'illustration 9.23 présente l'évolution des résidus locaux des équations du système au cours des itérations de corrections plastiques et l'illustration 9.24 l'évolution des inconnues du système non linéaire à résoudre. Le système comporte à présent 11 équations non linéaires à résoudre :  $(LE)_{ij}$ ,  $(LEVP)$ ,  $(LR_{dev}^c)$  et  $(LF_{dev}^c)$ .

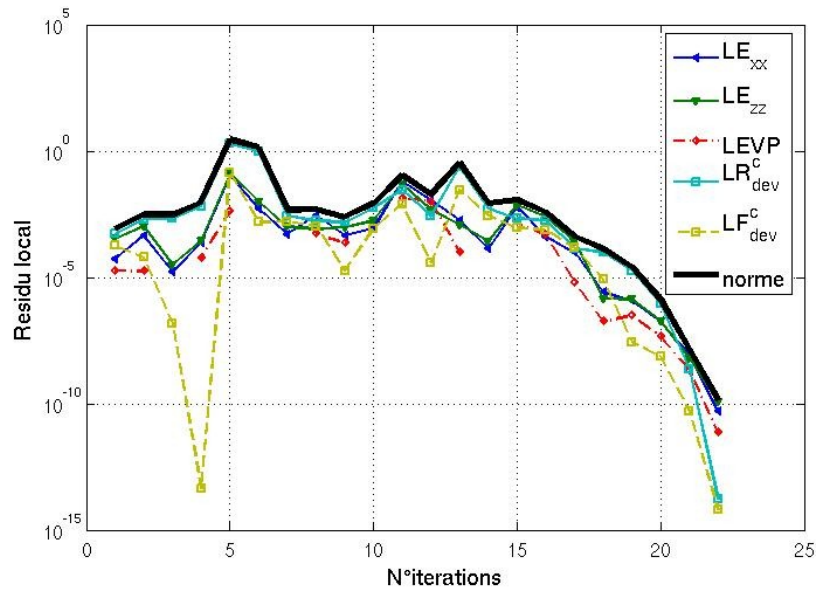


Illustration 9.23 : Convergence locale du modèle de Hujeux pour un  $M^{pot}$  donné

Les réponses obtenues présentent un profil de convergence très chahutés, avec des valeurs intermédiaires aberrantes, obtenues durant les itérations plastiques de corrections. On peut notamment signaler les valeurs négatives des degrés de mobilisation  $r_{dev}^c$ , ou encore les états de contraintes positives. Néanmoins, malgré les difficultés relevées, l'algorithme de Newton parvient finalement à converger pour l'ensemble du système d'équations.

En sortie de résolution de ce système, le domaine potentiel de mécanismes actifs est à nouveau modifié pour intégrer un nouveau mécanisme isotrope cyclique détecté potentiellement actif par l'algorithme local de contrôle des mécanismes actifs (§4.3.5). Le prédicteur élastique,  $\sigma_{ij}^{elas}$ , utilisé pour la résolution du nouveau système non linéaire à résoudre est repris directement de la solution convergée (illustration 9.24) obtenue pour le précédent domaine potentiel de mécanismes actifs,  $M^{pot}$ . Le système comporte maintenant 13 équations non linéaires à résoudre :  $(LE)_{ij}$ ,  $(LEVP)$ ,  $(LR_k^c)$  et  $(LF_k^c)$ .

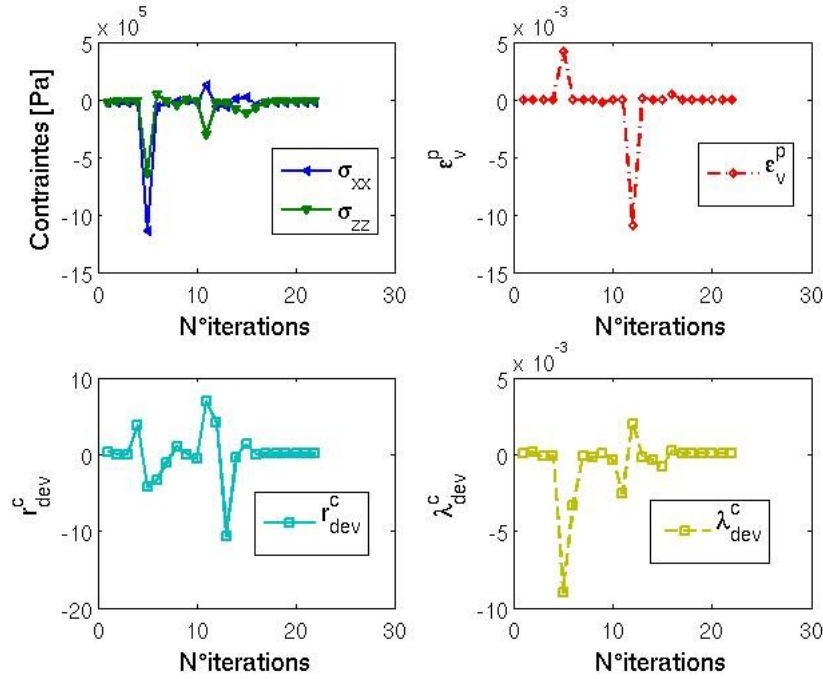


Illustration 9.24 : Convergence des inconnues locales du modèle de Hujew après 0.25 cycle de chargement

Les résultats obtenus avec ce nouveau domaine  $M^{pot}$  (illustrations 9.25 et 9.26) convergent plus rapidement (dix itérations au lieu de vingt deux) mais les évolutions des variables d'état du système ne sont toujours pas régulières. Il faut noter que le taux de convergence est faible sur les premières itérations puis, augmente à partir de la quatrième itération. Les taux de convergence sont plus forts pour les dernières itérations sur les équations  $(\mathbf{LR}_{dev}^c)$  et  $(\mathbf{LF}_{dev}^c)$ . Les valeurs des inconnues du système restent cette fois-ci dans leur domaine de validité à chaque itération de correction plastique.

On constate, en revanche, une évolution régulière des résidus locaux pour l'ensemble des équations du système. On remarque également que le résidu maximal est porté par l'équation  $(\mathbf{LR}_{dev}^c)$  et ceci pour les deux domaines  $M^{pot}$  proposés. L'érouissage des surfaces de charge déviatoires cycliques est très important à cet instant du chargement (naissance et érouissage des surfaces).

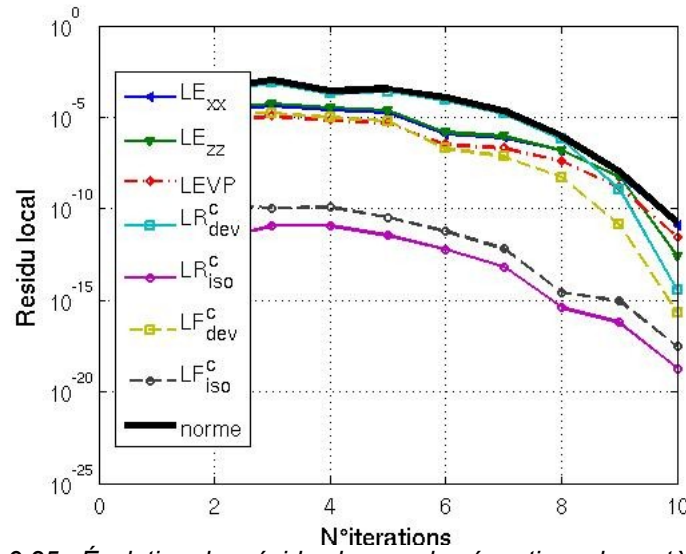


Illustration 9.25 : Évolution des résidus locaux des équations du système non linéaire local à résoudre

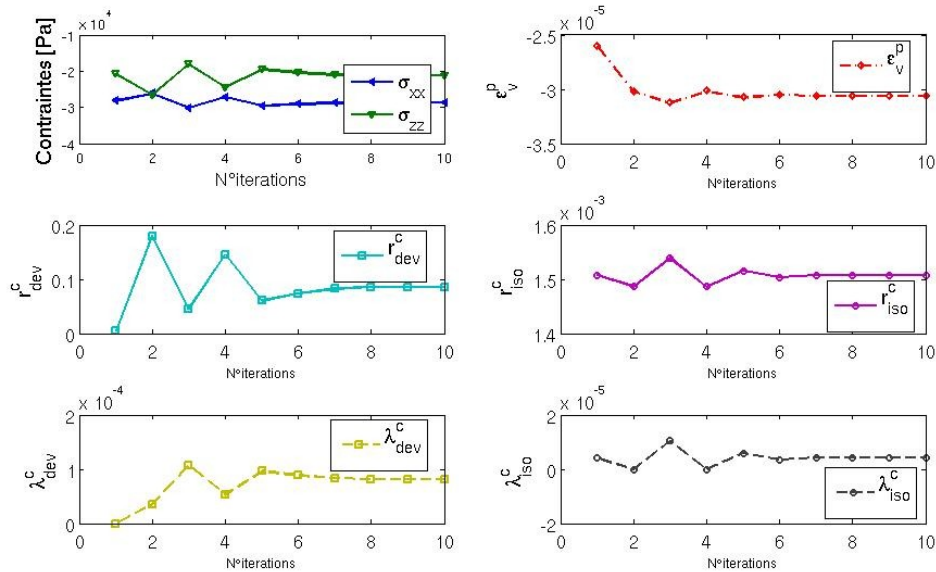


Illustration 9.26 : Convergence des inconnues locales du modèle de Hujeux après 0.25 cycle de chargement

Le comportement de l'algorithme d'intégration locale du modèle de Hujeux est fortement conditionné par la qualité du prédicteur élastique de contraintes  $\sigma_{ij}^{elas}$ . Ce prédicteur est qualifié d'élastique, car les variables d'écrouissage ont une évolution nulle durant cette phase. Néanmoins l'état de contrainte  $\sigma_{ij}^{elas}$  n'est pas nécessairement établi à partir de la loi élastique non linéaire du modèle de Hujeux. En effet, deux cas possibles peuvent être distingués conduisant à utiliser d'autres approches pour établir ce prédicteur :

- L'état de contraintes précédent est situé sur le ou les seuil(s) de plasticité

d'une ou plusieurs surfaces de charge du modèle. Le prédicteur en contrainte est alors obtenu en utilisant l'opérateur tangent du modèle défini par les mécanismes plastiques actifs à l'état de contrainte précédent.

- Après une première intégration du modèle en se basant sur un domaine potentiel de mécanismes actifs,  $M^{pot}$ , de nouveaux seuils plastiques ne sont plus respectés ou des mécanismes appartenant à  $M^{pot}$  ont conduit l'algorithme de résolution à obtenir un multiplicateur plastique négatif. Le prédicteur élastique utilisé pour le nouveau domaine  $M^{pot}$  est tiré de l'état de contraintes obtenu en fin d'intégration pour le domaine  $M^{pot}$  précédent.

Ces remarques permettent de comprendre le comportement de l'algorithme pour les différents cas présentés.

- Le comportement local présenté après 2,5 cycles de chargement converge rapidement vers la solution, car le prédicteur élastique  $\sigma_{ij}^{elas}$  a été établi à partir de l'opérateur tangent basé sur l'état du matériau à l'instant précédent. Dans cette phase du chargement, l'évolution du chargement  $y$  est monotone, ce qui garantit un prédicteur de qualité.
- Après 0,25 cycle de chargement, pour le deuxième domaine  $M^{pot}$  considéré, le prédicteur élastique est basé sur l'état matériau obtenu après intégration locale où les mécanismes déviatoires monotones étaient considérés comme actifs, erreur corrigée ensuite, puisque les multiplicateurs plastiques de ces mécanismes étaient négatifs. Le prédicteur élastique est alors moins cohérent avec l'évolution du chargement qui conduit à une décharge des mécanismes déviatoires monotones. L'algorithme de résolution a donc plus de difficultés pour équilibrer l'ensemble du système d'équations (22 itérations de correction plastique).
- Après 0,25 cycle de chargement et définition du troisième domaine  $M^{pot}$ , le prédicteur élastique considéré vérifie les seuils déviatoires cycliques. La convergence de l'algorithme local de Newton est alors beaucoup plus rapide (7 itérations de correction plastique)

Le choix du prédicteur élastique  $\sigma_{ij}^{elas}$  est heuristique et des améliorations peuvent encore être apportées à cet algorithme. Pour accélérer la convergence de l'algorithme de résolution, l'utilisation d'une méthode de recherche linéaire serait une solution séduisante et rapide à mettre en oeuvre dans le Code\_Aster, puisque déjà opérationnelle pour d'autres modèles de comportement du code. Ce choix est d'ailleurs conseillé par Armero et Pérez-Foguet (2002) et Jeremic (2001) pour les algorithmes implicites type CPPM (§2.6).

### 9.5.2.3 Convergence globale

Ce paragraphe s'attache à observer le comportement de l'algorithme de résolution de l'équilibre global du problème aux limites posé. Le taux de convergence quadratique de l'algorithme est assuré pour des incréments de chargement faibles. L'illustration 9.27 confirme ce point et le taux de convergence se dégrade avec l'augmentation de la valeur des incréments de chargement.

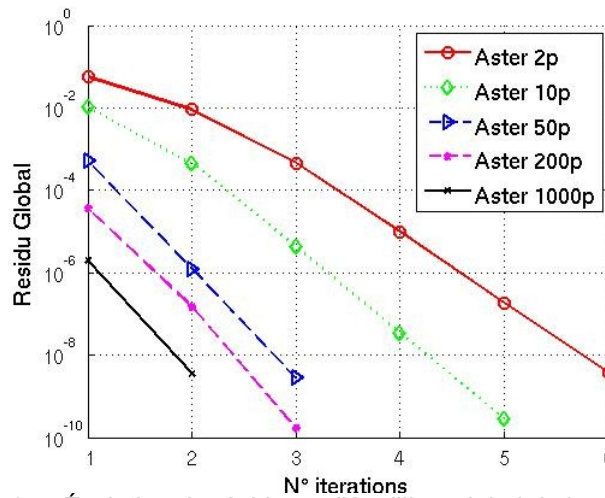


Illustration 9.27 : Évolution du résidu sur l'équilibre global de la structure après 2.5 cycles de chargement

Le taux de convergence quadratique est retrouvé pour des incréments de chargement de 600 Pa. La convergence est considérée comme acquise pour cet exemple lorsque le résidu est inférieur à  $10^{-8}$ .

### 9.5.3 Retour sur les résultats de l'essai triaxial non drainé cyclique

L'essai triaxial non drainé cyclique a permis de s'assurer de la cohérence des valeurs obtenues avec le schéma d'intégration implicite en comparaison des résultats fournis par le schéma d'intégration explicite implanté dans Lawyer. Les résultats ont été comparés et validés sur l'ensemble des variables d'état et internes du modèle de Hujeux.

La convergence des résultats est obtenue rapidement pour des valeurs d'incrémentes au moins 10 fois plus larges que les valeurs obtenues avec le schéma d'intégration explicite.

Cet essai a permis également de présenter le comportement de l'algorithme local d'intégration implicite du modèle de Hujeux pour des trajets de chargement cycliques. Les approches heuristiques mises en place apparaissent efficaces pour réaliser l'intégration du modèle pour des trajets de chargement cycliques et sont capables de remettre en cause le domaine  $M^{pot}$  obtenu initialement à partir des prédictors élastiques. Cet essai a également permis de mettre en avant le nombre important d'itérations nécessaires à l'intégration du modèle, lorsque des changements de direction de chargement surviennent. Le schéma de résolution du système d'équations non linéaires local, couplé à une méthode de recherche linéaire doit permettre de réduire ce nombre et ainsi diminuer le temps local consommé pour l'intégration du modèle.

Les performances de l'opérateur tangent continu sont à nouveau en accord avec les attentes, puisque la convergence quadratique est atteinte en dessous d'une valeur seuil de la valeur des incréments de chargement. Des difficultés de convergence globales sont néanmoins apparues pour des incréments de chargement proches des changements de direction de chargement, phénomène qui disparaît avec le raffinement de la discrétisation du chargement appliqué.



## 9.6 Essai de cisaillement avec micro-décharges

Dans le cadre de cet exemple, on réalise un essai de cisaillement cyclique, contrôlé en force, en mécanique pure (équivalent à des conditions hydrauliques drainées) avec le modèle de Hujoux. Au cours des cycles de charge-décharge, des micro-décharges sont réalisées pour tester la capacité du modèle de Hujoux à retrouver le module de cisaillement écroui avant cette micro-décharge. Les résultats obtenus sont comparés à des résultats issus de Code-Aster pour un trajet de chargement cyclique identique sans les micro-décharges et également issus de Lawyer. L'enjeu de cet essai consiste à vérifier si la gestion des mécanismes cycliques du modèle de Hujoux est correctement établie lorsque l'état de contrainte conduit à rencontrer le point de tangence ( $X_k^H$ , équation 3.22) des surfaces de charge cyclique, tout en restant dans le domaine élastique des surfaces de charge déviatoires cycliques.

Cet essai de cisaillement a été intégré à la base de cas-tests de non régression du Code\_Aster sous le nom de SSNV207A.

### 9.6.1 Géométrie

L'essai de cisaillement cyclique est effectué sur un unique point de Gauss. Il est contrôlé intégralement en contraintes et déformations imposées.

### 9.6.2 Propriétés matériaux

Les propriétés matériaux utilisées sont identiques à celles présentées précédemment pour les essais de laboratoire : essai biaxial drainé et triaxial non drainé cyclique (tableau 9.3). Il s'agit d'un sable d'Hostun à  $DR=40\%$ .

### 9.6.3 Conditions aux limites et de chargements

L'essai de cisaillement cyclique présenté est réalisé en mécanique pure. On impose au niveau local sur le point matériel considéré une contrainte de cisaillement  $\sigma_{xy}$ , variable durant l'essai. Les composantes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont constantes durant l'essai et égales à la valeur de pression de confinement de  $P_0 = -50 \text{ kPa}$ . L'essai réalisé correspond à un essai de cisaillement direct.

Dans le modèle considéré, les contraintes imposées suivent l'évolution suivante :

- Pression de confinement constante :  

$$P_0 = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -50 \text{ kPa}$$
- Conditions de chargement :  

$$\sigma_{xy} = F_1(t), \quad t \text{ correspondant au temps fictif de la modélisation}$$

Le chargement s'effectue en deux phases :

- Un état de confinement isotrope

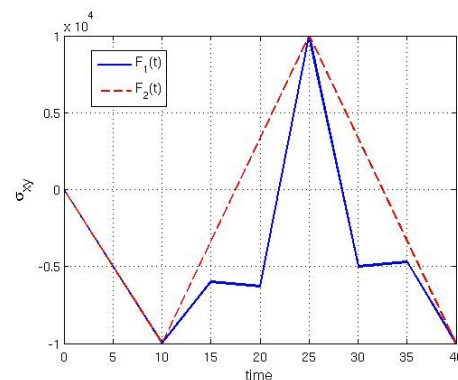


Illustration 9.28 : Évolution des contraintes de cisaillement au cours de l'essai



$P_0 = -50 \text{ kPa}$  est affecté au point matériel considéré ;

- Une contrainte de cisaillement  $\sigma_{xy}$  est imposée et varie entre  $t=0$  et  $t=40$  selon la fonction  $F_1(t)$  (illustration 9.28). La valeur de la micro-décharge appliquée est égale à  $300 \text{ Pa}$ , équivalent à un rayon mobilisé de  $r_{mob} = 0,0069 < 2 \cdot r_{ela}^{d,c} (=0,1)$  assurant de rester dans le domaine élastique des mécanismes déviatoires cycliques.

On rappelle que la variable  $t$  n'a aucune dimension physique et permet juste d'assurer une discrétisation du chargement.

Une comparaison des résultats sera menée entre les résultats du Code\_Aster et Lawyer.

Un essai de comparaison est également réalisé avec Code\_Aster où un essai de cisaillement direct cyclique est réalisé sans les micro-décharges. Les contraintes  $\sigma_{xy}$  suivent alors la fonction  $F_2(t)$  (illustration 9.28).

#### 9.6.4 Paramètres numériques de l'étude

La convergence est supposée acquise pour un résidu global inférieur à  $1e-8$ , valeur identique pour la convergence locale du modèle de Hujeux dans sa formulation implicite.

#### 9.6.5 Résultats

Les solutions sont obtenues au point matériel considéré et une comparaison entre les différentes simulations sous Code\_Aster et Lawyer est présentée ci-dessous. Les résultats sont présentés sous différentes formes. Les légendes sont à transcrire comme suit :

- Code-Aster A représente les résultats avec micro-décharges ;
- Code-Aster S représente les résultats sans micro-décharges ;
- Lawyer illustre les résultats de Lawyer avec micro-décharges.

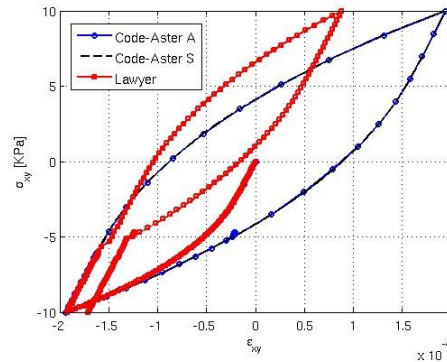


Illustration 9.29 : Essai de cisaillement cyclique avec le modèle de Hujeux sur un sable d'Hostun à  $DR = 40\%$

Sur l'illustration 9.29, dans le plan  $(\epsilon_{xy}, \sigma_{xy})$ , on remarque un comportement identique sous Code\_Aster pour les chemins de chargement avec et sans micro-décharges. En revanche, les résultats issus de Lawyer sont différents et présentent des incohérences par rapport à la formulation initiale du modèle de Hujeux. En effet, lors des micro-décharges, un écrouissage injustifié (illustration 9.30a) est relevé sur les surfaces de charge déviatoires cycliques. Cet écrouissage créé induit un saut sur la valeur de  $\epsilon_v^p$  (illustration 9.30b). De plus, la valeur du module de cisaillement initial n'est pas retrouvée après la phase de micro-décharge, comportement non présent sous Code\_Aster. Ce comportement suspect peut être corrigé en portant attention au point de tangence entre les surfaces de charge

déviatoires cycliques relatives aux mécanismes « père » et « fils ».

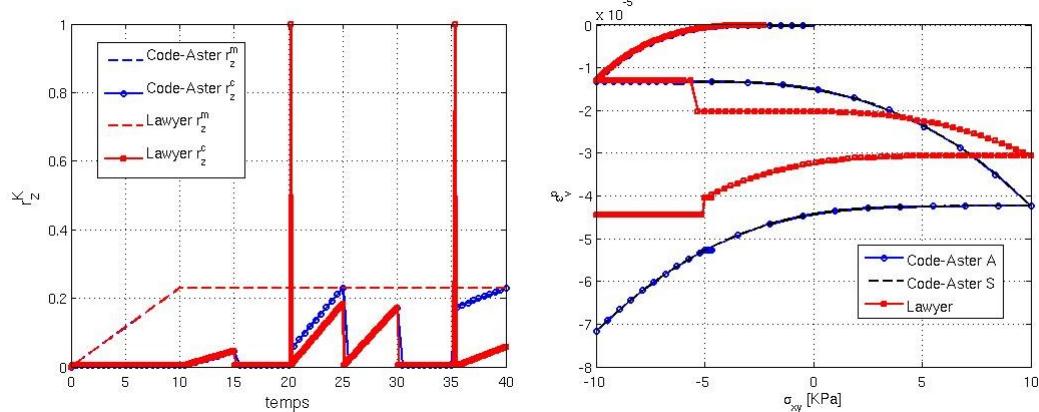


Illustration 9.30 : a) Évolution des rayons déviatoires monotones et cycliques du modèle de Hujeux b) Évolution de  $\epsilon_v^p$  ; pour un essai de cisaillement cyclique sur sable d'Hostun à  $DR=40\%$

Ces résultats mettent en avant la difficulté générée par l'écriture des surfaces de charge cycliques déviatoires du modèle de Hujeux, notamment la condition portant sur le point de tangence. Une gestion au cas par cas des différents scénarii a été nécessaire pour assurer un comportement robuste et efficace du modèle pour tous les chemins de chargement décrits jusqu'ici. Les différences constatées pour la gestion des mécanismes cycliques laissent entrevoir des difficultés pour une comparaison fine des deux algorithmes pour des chargements sismiques, par exemple.



## 9.7 Modélisation d'une digue en terre avec le modèle de Hujeux

L'ensemble des résultats présentés dans cette section sont issus du travail de recherche de M.Kham (2009). Ce travail consistait à établir la méthodologie sous Code\_Aster pour réaliser la construction par couches et la mise en eau d'une digue en terre homogène en vue d'une exportation au pôle d'ingénierie hydraulique de l'EDF, le CIH. Ces résultats permettent de démontrer la capacité et la robustesse du modèle de Hujeux intégré selon un schéma implicite de réaliser des études industrielles. Ce paragraphe s'intéresse plus particulièrement à la comparaison des résultats obtenus sous Code\_Aster à ceux obtenus avec le logiciel GEFDyn, outil de modélisation référence actuel au CIH pour réaliser ces études. La méthodologie mise en place pour réaliser les différentes phases du calcul ne seront pas explicitées dans leur ensemble. Pour une présentation exhaustive de la méthode, le lecteur pourra se reporter au document synthèse de M.Kham (2009).

La géométrie de la digue, puis les conditions de chargement sont présentés pour ensuite réaliser une comparaison fine des résultats obtenus sous Code\_Aster et GEFDyn.

### 9.7.1 Méthodologie générale

On adopte une méthodologie dite multi-modèles, similaire à celle présentée au §5.2 , pour la phase de construction par couches de la digue.

#### 9.7.1.1 Mise en place de la fondation

Le modèle initial de l'étude contient uniquement le sol de fondation équilibré en imposant un état de contraintes et de pression hydraulique géostatique. Les conditions aux limites adoptées pour l'initialisation du calcul sont :

- Blocage vertical de la base de la fondation
- Blocage horizontal des parois latérales de la fondation
- Application d'une pression libre mécanique en surface égale à  $10^4$  Pa
- Pression hydraulique nulle sur la surface libre
- Flux hydraulique nul sur les bords latéraux et la base de la fondation.

Les conditions initiales appliquées au domaine d'études sont :

- une contrainte effective géostatique avec un coefficient de poussée des terres égal à 0,5.
- une pression hydraulique géostatique dans la fondation

#### 9.7.1.2 Construction par couches

Pour la pose de la  $n^{\text{ème}}$  couche, il est nécessaire d'y imposer des conditions aux limites :

- pression mécanique égale à la pression libre sur les bords libres

- pression hydraulique nulle sur les bords libres supérieurs

Le chargement appliqué lors de cette phase se limite à la pesanteur. Pour lisser le chargement dû à la pose de la nouvelle couche, la pesanteur est affectée progressivement dans la nouvelle couche.

### 9.7.1.3 Mise en eau de la digue

Le remplissage du bassin de retenue est modélisé jusqu'à une cote d'élévation donnée. Ce chargement est appliqué progressivement suivant une fonction linéaire dans le temps.

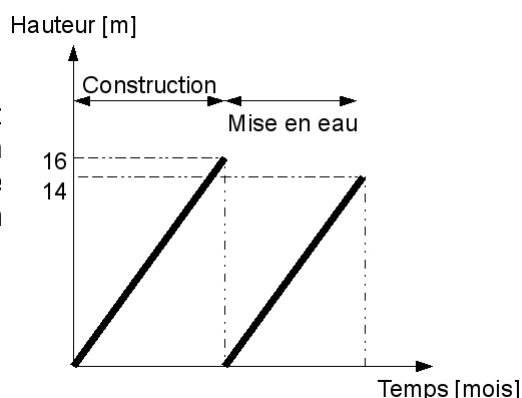


Illustration 9.31 : Historique de construction et mise en eau de la digue

## 9.7.2 Applications numériques

### 9.7.2.1 Cas d'une digue simplifiée

Le maillage de la digue est donné sur l'illustration 9.32. La composition du sol est identique dans toute la digue (paramètres matériaux affichés sur le tableau 9.5). Elle mesure 16m de haut avec une pente de 2/1 pour une base de fondation de 74 m de large. Chaque couche de sol a une hauteur de 1 m. La durée de la construction de la digue est fixée à 2,5 années soit environ  $5.10^6$  s pour poser une couche.

La fondation est modélisée par deux couches de sol ; la couche affleurante à la surface libre est modélisée avec le modèle de Hujeux (jusqu'à 18.5 m de profond) et la zone profonde par un modèle élastique représentant le comportement du rocher sur 2,5 m de haut.

La mise en eau de la digue suit une évolution linéaire dans le temps correspondant à une montée de 1 m du niveau de la retenue par mois, soit environ une vitesse de  $2,6.10^6$  s/m jusqu'à atteindre le niveau maximum fixé à 14 m (voir illustration X).

Le maillage est bidimensionnel et composé de 901 éléments quadratiques à intégration sélective, QUAD8(4) et 2844 nœuds.

La tolérance sur le résidu lié à l'intégration locale du modèle de comportement de Hujeux est fixée à  $10^{-7}$  tandis que celle liée au résidu de l'équilibre global est fixée à  $10^{-4}$  (valeur utilisée avec Code\_Aster). L'étude réalisée sous GEFDyn est supposée convergée pour un résidu global inférieur à  $10^{-3}$  sur les déplacements et  $10^{-1}$  sur les efforts.

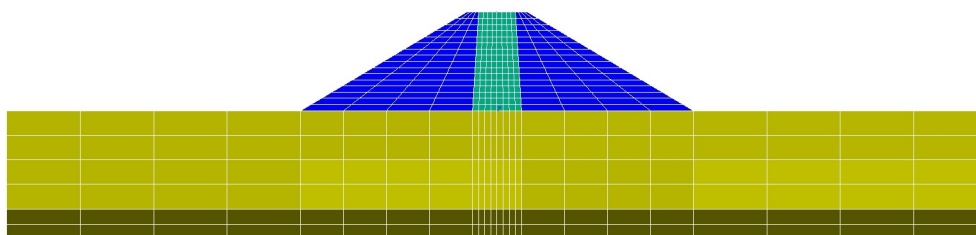


Illustration 9.32 : Maillage de la digue simplifiée de pente 2/1

PARAMETRES	DIGUE	FONDATION	ROCHER
Poussée des terres		0,8	0,8
Masse volumique [kg/m³]	2650	2650	2650
<b>ELASTICITE</b>			
$K \text{ (MPa)}$	516,2	516,2	436,7
$G \text{ (MPa)}$	238,2	238,2	327,5
$n^e$	0,4	0,4	
$P_{ref} \text{ (MPa)}$	-1	-1	
<b>ETAT CRITIQUE + PLASTICITE PARFAITE</b>			
$\phi$	40	40	
$\beta$	30	30	
$d$	2,5	2,5	
$b$	0,2	0,2	
$P_{c0} \text{ (MPa)}$	-1	-3	
<b>LOI D'ECOULEMENT + ECROUISSAGE ISOTROPE</b>			
$\psi$	40	40	
$a_{mon}$	0,008	0,008	
$a_{cyc}$	0,0001	0,0001	
$c_{mon}$	0,15	0,15	
$c_{cyc}$	0,075	0,075	
$x^m$	1	1	
<b>SEUIL DES DOMAINES</b>			
$r_{d,mon}^{ela}$	0,005	0,005	
$r_{d,cyc}^{ela}$	0,005	0,005	
$r_{hys}$	0,05	0,05	
$r_{mob}$	0,9	0,9	
$r_{iso}^{ela}$	0,0001	0,0001	
$\alpha$	1	1	
<b>PROPRIETES HYDRAULIQUES</b>			
Porosité	0,3	0,3	0,3
Perméabilité [m/s]	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$
Compressibilité [MPa]	$10^{+6}$	$10^{+6}$	$10^{+6}$
Viscosité	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$
Coefficient de Biot	1	1	1

**Tableau 9.5 : Paramètres hydrauliques et mécaniques pour la digue simplifiée homogène**

Sur les illustrations 9.34 à 9.40, on compare les résultats obtenus avec Code\_Aster à ceux obtenus avec GEFDyn, pour la construction par couches et la mise en eau. On fournit également sur l'illustration 9.33 les temps CPU machines relevés à chaque étape de la construction pour un total de 3860 s, soit un peu plus d'1 heure. La mise en eau de la digue a quant à elle été réalisée en 15215 s, soit 3h30min. Les temps CPU relevés avec GEFDyn sont inférieurs, puisque le calcul pour la phase de construction a pris 3600 s (à peu près équivalent) et la phase de mise en eau 500 s. Les performances en temps CPU affichées pour le calcul de la digue sous Code\_Aster peuvent néanmoins varier en fonction des difficultés rencontrées dans le calcul.

Les illustrations 9.34 à 9.40 présentent l'évolution au cours de la construction par couches ainsi qu'à la fin de la mise en eau des différentes quantités d'intérêt suivant une coupe verticale passant par l'axe de symétrie vertical de la digue.

- Les tassements et la pression hydraulique relevés sont en très bon accord entre les deux codes.
- La comparaison des valeurs des variables d'écrouissage caractérisant le degré de mobilisation de l'angle de frottement au sein de la digue sont relativement bonnes entre les deux codes en terme d'évolution. Des différences quantitatives apparaissent néanmoins au cours de la construction, maintenue durant la mise en eau.
- Les déplacements latéraux relevés sont également très proches.

Cette étude de cas simplifiée a permis de tester la robustesse et de valider la méthodologie mise en place pour réaliser la construction par couches et la mise en eau de la digue.

Cette méthodologie d'étude pour la réalisation d'un calcul de construction et mise en eau de digue a également été éprouvée sur le barrage zoné d'El Infiernillo qui a fait l'objet d'un benchmark ICOLD en 1992. Les résultats détaillés sont présentés dans le document de Kham (2009).

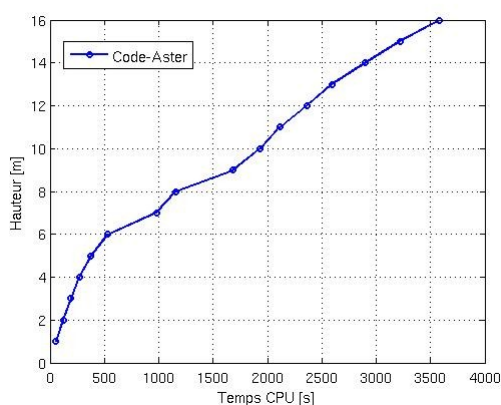


Illustration 9.33 : Temps CPU machine nécessaire avec Code\_Aster en fonction de la hauteur de la digue construite

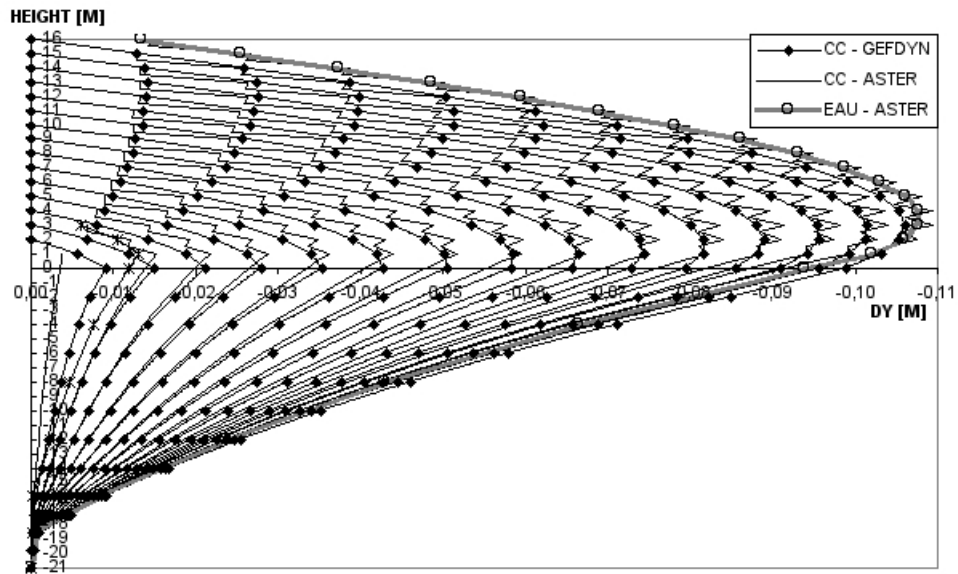


Illustration 9.34 : Comparaison de l'évolution du tassement vertical suivant une coupe verticale lors de la construction entre Code\_Aster (ligne continue) et GEFDyn (pointillés)

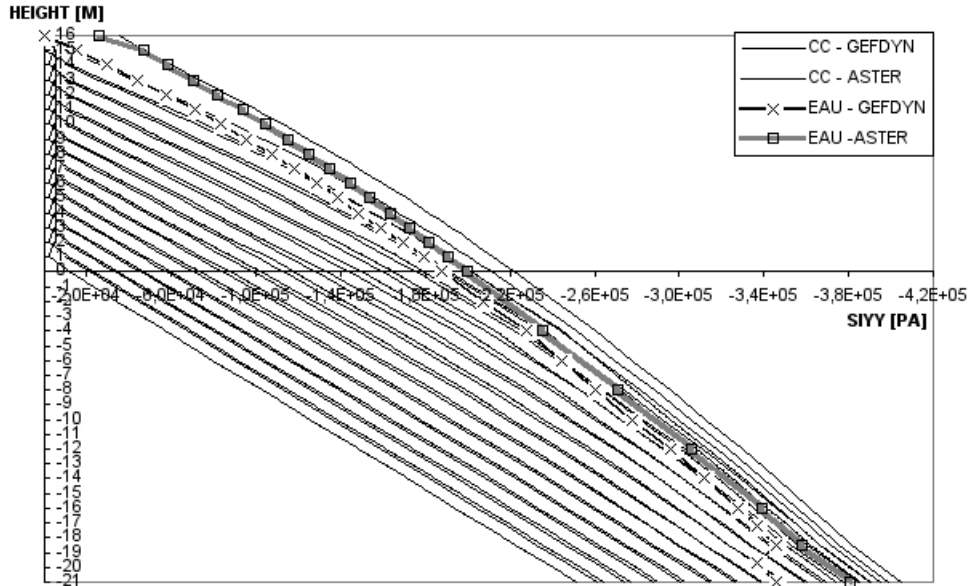


Illustration 9.35 : Comparaison de l'évolution de  $\sigma'_{yy}$  suivant une coupe verticale entre Code\_Aster (ligne continue) et GEFDyn (pointillés) pendant la phase de construction et en fin de mise en eau de la digue



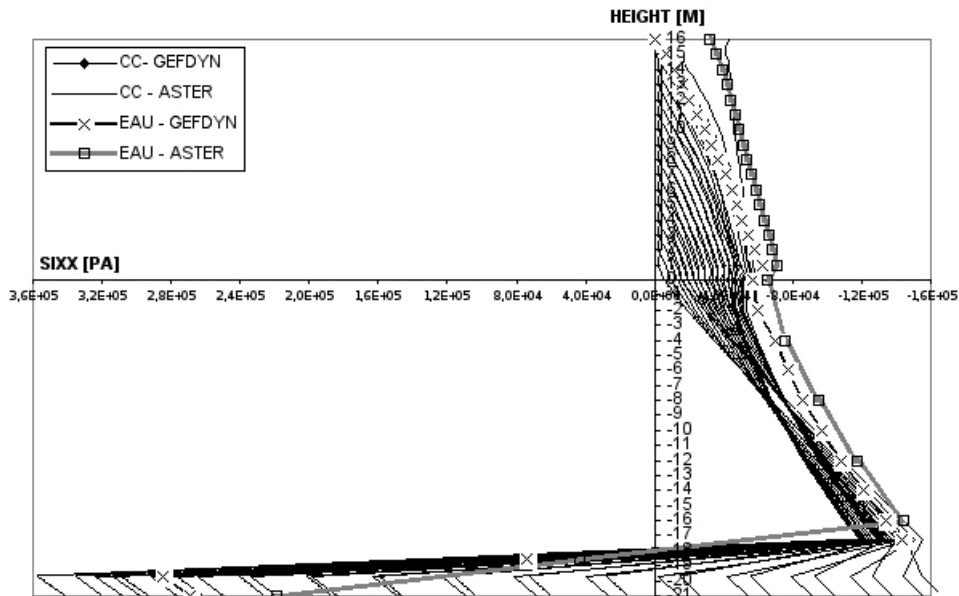


Illustration 9.36 : Comparaison de l'évolution de  $\sigma'_{xx}$  selon une coupe verticale suivant une coupe verticale entre Code\_Aster (ligne continue) et GEFDyn (pointillés) lors de la construction et en fin de mise en eau de la digue

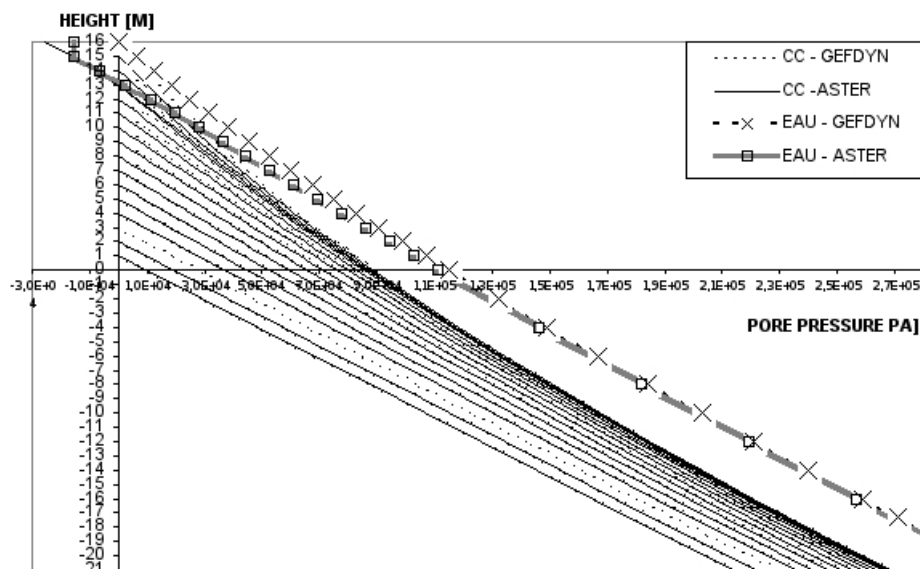


Illustration 9.37 : Comparaison de l'évolution de la pression hydraulique  $u$  selon une coupe verticale entre Code\_Aster (ligne continue) et GEFDyn (pointillés) pendant la construction et en fin de mise en eau de la digue

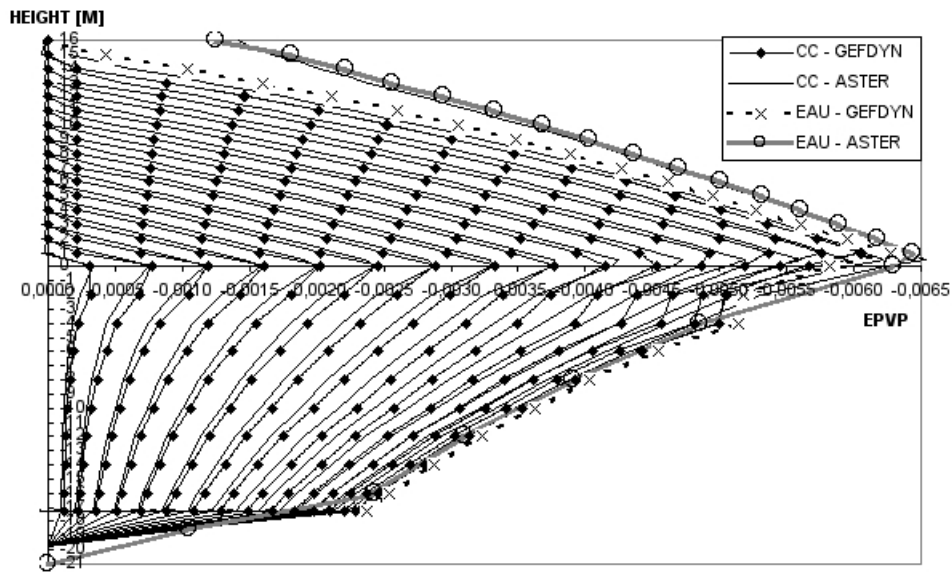


Illustration 9.38 : Comparaison de l'évolution de  $\epsilon_v^p$  selon une coupe verticale entre Code\_Aster (ligne continue) et GEFDyn (pointillés) pendant la construction et en fin de mise en eau de la digue

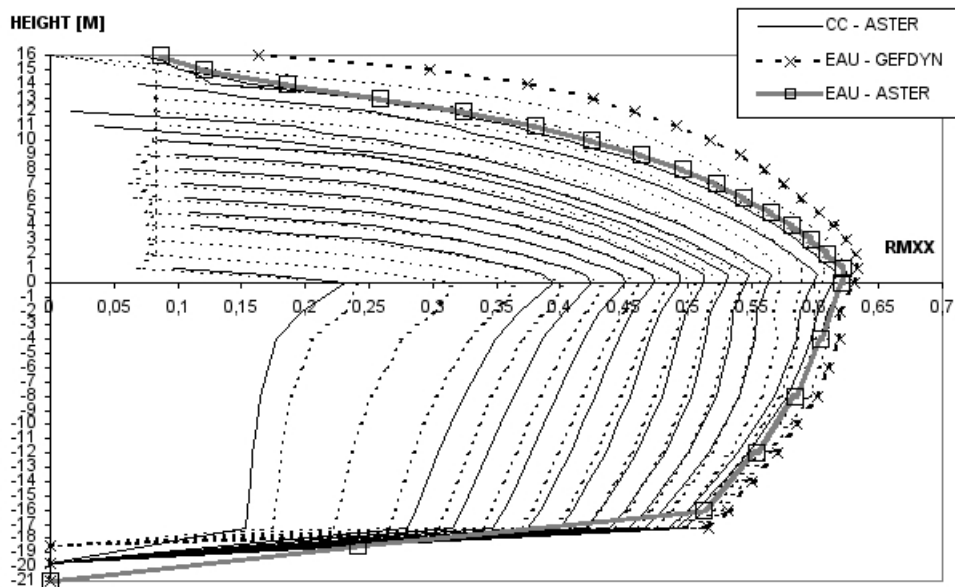


Illustration 9.39 : Comparaison de l'évolution de  $r_{xx}^m$  selon une coupe verticale entre Code\_Aster (ligne continue) et GEFDyn (pointillés) pendant la construction et en fin de mise en eau de la digue

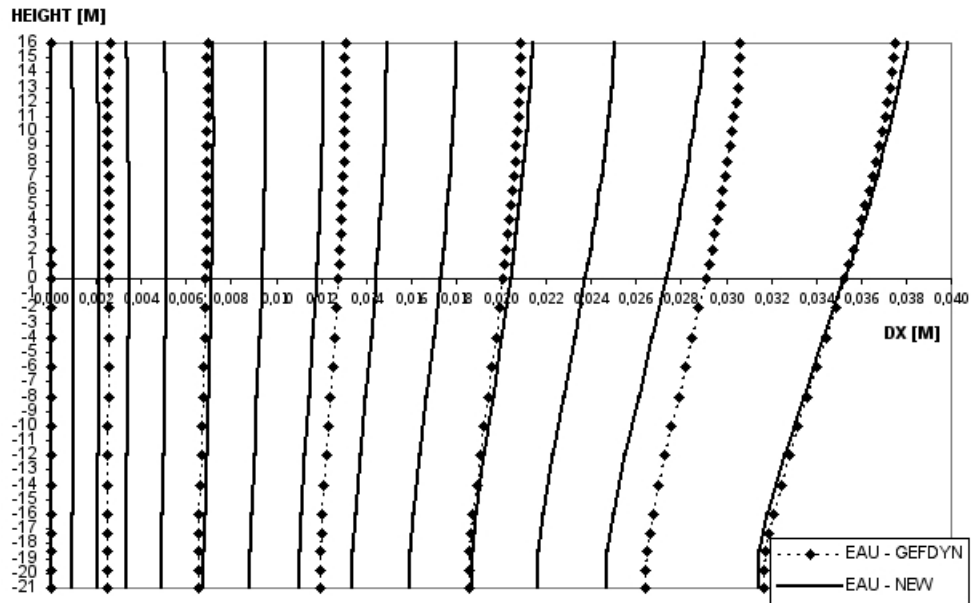


Illustration 9.40 : Comparaison de l'évolution du déplacement horizontal  $u_x$  selon une coupe verticale entre Code\_Aster (ligne continue) et GEFDyn (pointillés) lors de la construction et en fin de mise en eau de la digue

## 9.8 Analyse des systèmes dynamiques

### 9.8.1 Approche continue

L'étude de la stabilité de l'équilibre pour un système mécanique à  $n$  degrés de liberté se réduit, dans le cadre de la théorie linéarisée, à l'examen du comportement asymptotique pour  $t \rightarrow \infty$  de la solution vectorielle d'une équation différentielle matricielle du second ordre. L'analyse asymptotique conduit à formuler plusieurs propositions qui énoncent des conditions de stabilité ou d'instabilité.

Soit un système mécanique ayant  $n$  degrés de liberté dont la configuration est décrite par la coordonnée vectorielle  $U(t) \in \mathbb{R}^n$ . L'équation du mouvement du système linéarisé au voisinage de la configuration  $U(t_0)=0$ , supposée à l'équilibre, écrite sous forme matricielle est :

$$M \cdot \ddot{U}(t) + C \cdot \dot{U}(t) + (K + D) \cdot U(t) = 0 \quad (9.49)$$

avec :

$M$  : la matrice symétrique de masse définie positive,

$C$  : la matrice symétrique d'amortissement définie positive,

$K$  : la matrice symétrique de l'opérateur tangent de rigidité (correspond aux forces conservatives),

$D$  : la matrice anti-symétrique de l'opérateur tangent de rigidité .

Toutes ces matrices ont une dimension  $n \times n$  .

La matrice  $D$  étant antisymétrique, elle a les propriétés suivantes :  
 ${}^t D = -D \Rightarrow \det D = (-1)^n \det D$  . La condition  $\det(D) \neq 0$  imposera alors que  $n$  soit un nombre pair. L'équation caractéristique associée à l'équation de mouvement 9.49, avec  $\lambda$  un nombre complexe, est donnée par la relation suivante :

$$\det(\lambda^2 \cdot M + \lambda \cdot C + K + D) = 0 \quad (9.50)$$

Les propriétés de symétrie et d'antisymétrie des matrices utilisées dans l'équation 9.49 permettent également d'écrire l'expression suivante :

$$\det(\lambda^2 \cdot M + \lambda \cdot C + K - D) = 0 \quad (9.51)$$

La stabilité du système est assurée si toutes les racines  $\lambda$  ont une partie réelle négative. A l'inverse, une instabilité apparaît dès qu'une racine a une partie réelle positive.

De plus, on définit de manière usuelle le produit scalaire de deux vecteurs  $u$  et

$v$  :  $(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i \cdot \bar{v}_i$  , avec  $\bar{v}_i$  la valeur conjuguée de  $v_i$  . Les propriétés des

matrices  $K$  et  $D$  permettent alors d'établir les relations qui suivent :

$$\begin{aligned}
 \forall u, \forall v, \quad (v, u) &= (\bar{u}, \bar{v}) \\
 \forall u, \forall v, \quad (K \cdot u, v) &= (u, K \cdot v) \\
 \forall u, \forall v, \quad (D \cdot u, v) &= -(u, D \cdot v) \\
 \exists \alpha > 0 / \forall u, \quad (K \cdot u, u) &\geq \alpha \cdot (u, u) \\
 \forall u, \quad \Re(D \cdot u, u) &= 0
 \end{aligned} \tag{9.52}$$

Roseau(1984), se basant sur une analyse des équations caractéristiques, a démontré les conditions suffisantes suivantes (Tableau 9.6) :

C définie positive	Étude de la Stabilité
$D=0$ , $K$ définie positive	$U(t_0)$ est stable
$D=0$ , $K$ définie négative	$U(t_0)$ est instable si $(\lambda_k)_{k=1, \dots, 2 \cdot n}$ de 9.50 sont telles que $\Re(\lambda_k)_{k \in [1, n]} < 0$ et $\Re(\lambda_k)_{k \in [n+1, 2 \cdot n]} > 0$
$D=0$ , une valeur propre de $K$ est négative	$U(t_0)$ est instable
$D \neq 0$ , $K$ définie négative	$U(t_0)$ est instable
$\det(K + D) < 0$	$U(t_0)$ est instable
$D \neq 0$ , $D \cdot C^{-1} \cdot M \cdot C \cdot D + K$ défini e positive	$U(t_0)$ est stable
Une valeur propre de $D \cdot C^{-1} \cdot M \cdot C \cdot D + K$ négative	$U(t_0)$ est instable

**Tableau 9.6 : Étude de la stabilité des solutions  $U(t_0)$  en fonction des propriétés des matrices du système étudié (Roseau, 1984)**

#### Remarque 1 :

La diagonalisation de l'opérateur tangent permet d'exprimer les équations différentielles sous forme découplées, établies pour les variables généralisées définies à partir des vecteurs propres. La valeur du module des valeurs propres définit le caractère stable de la solution. En effet, la stabilité est assurée si et seulement si les modules des valeurs propres sont inférieures à l'unité.

#### Exemple :

Dans le cas restreint d'un système dynamique à un degré de liberté, pour deux variables, les racines de l'équation caractéristique sont conjuguées :  $\lambda = \rho e^{\pm i \psi}$ . Les solutions peuvent être portées dans le plan complexe. Si le module  $\rho$  des racines est inférieur à 1, les trajectoires en spirale se dirigent vers l'intérieur et la stabilité est assurée. Dans le cas contraire,  $\rho > 1$ , les trajectoires en spirale vont vers l'extérieur et l'équilibre est instable.

En général, pour des valeurs propres conjuguées complexes, les cas suivants de perte de stabilité sont à considérer :

Si toutes les valeurs propres du système sont réelles positives, l'équilibre est stable. Le cas critique de perte de stabilité apparaîtra dès que la plus petite valeur propre tend vers zéro. La branche fondamentale de la réponse devient instable, pour un chargement critique. On parle alors d'instabilités divergentes.

S'il existe des valeurs propres complexes du système arrangées par paire de nombres complexes conjugués, la branche fondamentale de solutions devient instable et on parle d'instabilités de flottement. La valeur critique de chargement apparaîtra dès que l'ensemble des valeurs propres conjuguées disparaîtront :

$$\lambda = \rho e^{\pm i\psi}, \text{ avec } \psi \rightarrow 0.$$

### Remarque 2 :

En considérant un système élastique linéaire en début de chargement, caractérisé par une matrice de rigidité définie positive,  $K_0$ . Les équations de mouvement autour de cette position d'équilibre prennent la forme suivante :

$$M \cdot \ddot{U}(t) + C \cdot \dot{U}(t) + K_0 \cdot U(t) = 0 \quad (9.53)$$

La matrice d'inertie  $M$  étant définie positive, elle est donc inversible. En effectuant un changement de variable du type  $W = M^{1/2} \cdot U$ , l'équation 9.53 peut être réécrite comme suit :

$$\ddot{W}(t) + M^{-1/2} \cdot C \cdot M^{-1/2} \cdot \dot{W}(t) + M^{-1/2} \cdot K_0 \cdot M^{-1/2} \cdot W(t) = 0 \quad (9.54)$$

L'introduction d'une variable intermédiaire  $Z(t) = \dot{W}(t)$  permet d'établir le système d'équations dynamiques du premier ordre :

$$\begin{pmatrix} \dot{W}(t) \\ \dot{Z}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ M^{-1/2} \cdot K_0 \cdot M^{-1/2} & M^{-1/2} \cdot C \cdot M^{-1/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.55)$$

Comme indiqué précédemment, le comportement asymptotique de la réponse est gouvernée par la matrice de rigidité élastique  $K_0$ , puisque la solution prend la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} W(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = e^{-Q \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} W(0) \\ Z(0) \end{pmatrix} \text{ avec } Q = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ M^{-1/2} \cdot K_0 \cdot M^{-1/2} & M^{-1/2} \cdot C \cdot M^{-1/2} \end{pmatrix} \quad (9.56)$$

On peut à présent s'intéresser au comportement de l'opérateur  $Q$  :

$$\det(Q) = (-1)^n \cdot \det(M^{-1/2} \cdot K_0 \cdot M^{-1/2}) \cdot \det(-\text{Id}) = \det(K_0) / \det(M) \quad (9.57)$$

La recherche des valeurs propres et vecteurs propres du problème peut être

également effectuée :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } (\Phi_W, \Phi_Z) \text{ et } \lambda \text{ tel que:} \\
 & \begin{cases} -\text{Id} \cdot \Phi_Z - \lambda \cdot \text{Id} \cdot \Phi_W & = 0 \\ M^{-1/2} \cdot K_0 \cdot M^{-1/2} \cdot \Phi_W + M^{-1/2} \cdot C \cdot M^{-1/2} \cdot \Phi_Z - \lambda \cdot \text{Id} \cdot \Phi_Z & = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \begin{cases} \Phi_Z + \lambda \cdot \Phi_W & = 0 \\ (M^{-1/2} \cdot K_0 \cdot M^{-1/2} - \lambda \cdot M^{-1/2} \cdot C \cdot M^{-1/2} + \lambda^2 \cdot \text{Id}) \cdot \Phi_Z & = 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{9.58}$$

avec  $\lambda = \rho + i\omega$ . Ce problème correspond à un problème aux valeurs propres quadratiques.

Si dans le problème initial (équation 9.53), des forces extérieures sont ajoutées, l'expression de la solution au problème devient alors :

$$\begin{pmatrix} W(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = e^{-Q \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} W(0) \\ Z(0) \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-Q(t-\tau)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1} \cdot F(\tau) \end{pmatrix} d\tau \tag{9.59}$$

#### Remarque 3 :

Il s'agit ici d'introduire le concept de dualisation des conditions aux limites cinématiques du problème dynamique considéré sous contraintes affines. Les relations linéaires imposées sont du type  $B \cdot U = 0$ . Après dualisation par double multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$ , le problème obtenu à résoudre s'écrit comme suit (voir *Code\_Aster* (R3.03.01 et R5.01.01)) :

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} K & {}^t B & {}^t B \\ B & -\text{Id} & \text{Id} \\ B & \text{Id} & -\text{Id} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{M} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \tilde{U} = \begin{pmatrix} U \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \tag{9.60}$$

Ce choix garantit que le problème aux valeurs propres sous cette forme est identique au problème d'origine, dans le cas élastique linéaire.

## 9.8.2 Approche avec discrétisation spatio-temporelle

Le paragraphe présenté ci-dessous s'intéresse au comportement de la méthode de Newton dans le cadre d'une intégration temporelle de type Newmark, à l'introduction d'une perturbation de la solution. On se place dans le cas où les opérateurs d'inertie  $M$  et d'amortissement  $C$  sont supposés constants.

### 9.8.2.1 Préliminaires

L'analyse des instabilités des solutions, dans le cadre d'une discrétisation spatiale via la méthode des éléments finis, peut être étudiée en s'intéressant aux propriétés du jacobien du système d'équations non linéaires du problème. Le problème à résoudre dans le cas quasi-statique s'écrit comme suit :

$$R(U(t)) = F_{ext}(t) \quad (9.61)$$

avec  $R(U(t)) = {}^t Q \cdot \sigma_{(U(t), t)}$ ,  $Q$  étant l'opérateur discret représentant l'intégrale des puissances de déformations virtuelles sur le domaine complet et  $\sigma$  le champ de contraintes calculé en chaque point matériel du domaine.  $Q$  est supposé rester linéaire dans le cadre des petites déformations (on ne prend pas en compte les non linéarités géométriques).

La matrice tangente carrée  $R'(U(t)) = \frac{dR(U(t))}{dU(t)}$  doit être quant à elle définie positive pour s'assurer une convergence de l'algorithme itératif de Newton Raphson vers la solution du problème 9.56. Dans le cadre d'une analyse dynamique, après discrétisation spatiale, considérant un amortissement du type visqueux, le problème à résoudre à l'instant  $t_i = t_{i-1} + \Delta t$  prend la forme suivante :

$$M \cdot \ddot{U}(t_i) + C \cdot \dot{U}(t_i) + R(U, \dot{U}, t_i) = F_{ext}(t_i) \quad (9.62)$$

En choisissant par exemple d'utiliser un schéma de Newmark pour résoudre le problème précédent, il est nécessaire d'introduire deux scalaires  $\beta$  et  $\gamma$  pour obtenir une expression explicite des champs d'incrément de vitesse et d'accélération sur le domaine :

$$\begin{cases} \Delta \dot{U} = \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} \cdot \Delta U - \frac{\gamma}{\beta} \cdot \dot{U}(t) + \frac{(2 \cdot \beta - \gamma) \cdot \Delta t}{2 \cdot \beta} \cdot \ddot{U}(t) \\ \Delta \ddot{U} = \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot \Delta U - \frac{1}{\beta \Delta t} \cdot \dot{U}(t) - \frac{1}{2 \cdot \beta} \cdot \ddot{U}(t) \end{cases} \quad (9.63)$$

Le problème général à résoudre peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot M \cdot U(t_i) + \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} \cdot C \cdot U(t_i) + R(U(t_i), \dot{U}(t_i)) = L(t_i) \quad (9.64)$$

avec  $M$  la matrice de masse symétrique,  $C$  la matrice d'amortissement visqueux et  $L(t_i)$  le second membre, constitué des forces extérieures et des termes issus du pas de temps précédent :

$$\begin{aligned} L(t_i) = & F_{ext}(t_i) + \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot M \cdot \left( U_{i-1} + \Delta t \cdot \dot{U}_{i-1} + \Delta t^2 \cdot \left( \frac{1-2\beta}{2} \ddot{U}_{i-1} \right) \right) \\ & + \frac{1}{\beta \cdot \Delta t} \cdot C \cdot \left( \gamma \cdot U_{i-1} + \Delta t (\gamma - \beta) \cdot \dot{U}_{i-1} + \Delta t^2 \cdot \left( \frac{1-2\beta}{2} \ddot{U}_{i-1} \right) \right) \end{aligned} \quad (9.65)$$

Finalement la matrice tangente contrôlant le problème présenté ci-dessus s'exprime comme suit :

$$\hat{K}(U(t)) = \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot M + \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} \cdot C + \frac{dR(U(t))}{dU} \quad (9.66)$$



La matrice tangente du système  $\hat{K}(U(t))$  est constituée de l'opérateur tangent matériel, issu de la relation constitutive du matériau, ainsi que par les matrices de masse et d'amortissement. Les contributions des matrices de masse et d'amortissement sont contrôlées par les incréments de pas de temps. En fonction de la discrétisation temporelle imposée, les propriétés de l'opérateur tangent seront alors modifiées.

La méthode de Newmark permet d'obtenir les incréments de vitesse et d'accélération à partir de l'incrément de déplacement.

L'équation non linéaire 9.62 est résolue par une méthode itérative de Newton, où la première itération est obtenue à partir d'une prédiction d'Euler explicite du premier ordre,  $U^0(t_i) = U(t_{i-1}) + \Delta U_i^0 = U_i^0$  :

$$\hat{K}(U(t_{i-1})) \cdot \Delta U_i^0 = L(t_i) - L(t_{i-1}) \quad (9.67)$$

Les itérations de correction sont ensuite obtenues via les relations suivantes :

$$\begin{cases} U_i^{n+1} = U_i^n + \delta U_i^{n+1} & = U_{i-1} + \Delta U_i^n + \delta U_i^{n+1} \\ \dot{U}_i^{n+1} = \dot{U}_i^n + \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} \cdot \delta U_i^{n+1} & = \dot{U}_i^0 + \frac{\gamma}{\beta \cdot \Delta t} \cdot (U_i^{n+1} - U_i^0) \\ \ddot{U}_i^{n+1} = \ddot{U}_i^n + \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot \delta U_i^{n+1} & = \ddot{U}_i^0 + \frac{1}{\beta \cdot \Delta t^2} \cdot (U_i^{n+1} - U_i^0) \end{cases} \quad (9.68)$$

ou

$$\hat{K}(U(t_{i-1})) \cdot \delta U_i^{n+1} = L(t_i) - R(U_i^n) - C \cdot \dot{U}_i^n - M \cdot \ddot{U}_i^n \quad (9.69)$$

Un critère de convergence est établi en rapport avec la norme du vecteur résidu :

$$\frac{\|R(U_i^n) + C \cdot \dot{U}_i^n + M \cdot \ddot{U}_i^n - L(t_i)\|_\infty}{\|L(t_i)\|_\infty} < \eta \quad (9.70)$$

où  $\eta$  est une tolérance à respecter pour obtenir convergence et  $\| \cdot \|_\infty$  la norme usuelle des vecteurs.

Pour des conditions aux limites dualisées (relation linéaire imposée à un degré de liberté, condition unilatérale de Signorini) avec introduction des multiplicateurs de Lagrange,  $\mu_i^n$ , le critère 9.70 est modifié de la façon suivante :

$$\frac{\|R(U_i^n) + C \cdot \dot{U}_i^n + M \cdot \ddot{U}_i^n + {}^t B \cdot \mu_i^n - L(t_i)\|_\infty}{\|L(t_i)\|_\infty} < \eta_{tol} \quad (9.71)$$

avec  $B$  l'opérateur linéaire associé aux conditions aux limites imposées.

Le processus de résolution des équations du système non linéaire dynamique a été présenté à l'équation 9.69. Ce sont les propriétés des opérateurs  $\hat{K}$  et  $\frac{dR(U^n)}{dU}$  qui contrôleront la stabilité de la solution obtenue autour de sa position d'équilibre.

### 9.8.2.2 Perturbations de la suite des itérés de la méthode de Newton

Considérons à présent une perturbation  $w_i^n$  qui apparaît durant le processus d'itération de l'algorithme de Newton à l'instant  $t_i$ . En utilisant l'approximation quadratique des séries de Taylor et la dérivée de l'équation 9.69 par rapport à  $U_i^n$ , appliquée au candidat  $U_i^n$ , on obtient la relation suivante (voir §9.9) :

$$\hat{K}_i^n|_{(U_i^n)} w_i^{n+1} + C \dot{w}_i^n + M \ddot{w}_i^n - \frac{1}{2} w_i^n \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} w_i^n + w_i^n \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} w_i^{n+1} = 0 \quad (9.72)$$

L'hypothèse initiale de cette analyse repose sur le fait que la phase de prédiction initiale a donné une solution unique  $U_i^0$ , qui est équivalente à considérer un opérateur  $\hat{K}_{i-1}$  régulier. L'unicité de la solution  $U_i^0$  impose  $w_i^0 = 0$ . L'équation 9.72 nous permet d'extraire la condition suivante portant sur  $w_i^1$  :  $\hat{K}_i^0 w_i^1 = 0$  au troisième ordre en  $w_i^1$ , soit  $w_i^1 \in \text{Ker}(\hat{K}_i^0)$ .

Si l'opérateur tangent est régulier, alors  $w_i^1 = 0$  et ceci reste vrai tant qu'il garde sa régularité. Il n'y a pas de solutions perturbées possibles. Si l'opérateur  $\hat{K}_i^0$  est singulier, alors il est possible de construire une direction de solution  $w_i^1 \neq 0$ , avec

$$\dot{w}_i^1 = \frac{\mathcal{Y}}{\beta \Delta t} w_i^1 \quad \text{et} \quad \ddot{w}_i^1 = \frac{1}{\beta \Delta t^2} w_i^1.$$

L'itéré suivant  $w_i^2$  vérifie également selon l'équation 9.72 :

$$\left( \hat{K}_i^1|_{U_i^1} + w_i^1 \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^1, \dot{U}_i^1, t_i)} \right) w_i^2 = \left( \frac{1}{2} w_i^1 \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^1, \dot{U}_i^1, t_i)} - \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\mathcal{Y}}{\beta \Delta t} C \right) w_i^1 \quad (9.73)$$

- Si  $\hat{K}_i^1|_{U_i^1}$  est singulier, alors pour  $w_i^2 \in \text{Ker}(\hat{K}_i^1)$ , on a au second ordre près en  $w_i^2$  :

$$\left( w_i^1 \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^1, \dot{U}_i^1, t_i)} \right) w_i^2 - \left( \frac{1}{2} w_i^1 \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^1, \dot{U}_i^1, t_i)} - \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\mathcal{Y}}{\beta \Delta t} C \right) w_i^1 = 0.$$

- Si  $\frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^1, \dot{U}_i^1, t_i)}$  est régulier pour les directions  $w_i^1$  et  $w_i^2$ , alors  $w_i^2$  est une perturbation non nulle admissible, au troisième ordre près.

- Si  $\frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^1, \dot{U}_i^1, t_i)}$  est singulier, alors  $w_i^2$  n'est pas quantifiable pour les directions contenues dans le  $\text{Ker}(\hat{K}_i^1)$ . La suite des itérés diverge.
- Si  $\hat{K}_i^1|_{U_i^1}$  est régulier, alors  $w_i^2$  est une perturbation non nulle admissible, dépendant de  $w_i^1$ . On remarque néanmoins que la suite  $U_i^n + w_i^n$  ne converge pas nécessairement vers  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_i^n$ .

En reprenant les résultats établis ci-dessus, on relève plusieurs points importants :

- Tant que l'opérateur tangent du système  $\hat{K}_i^n|_{U_i^n}$  reste régulier, aucune bifurcation ne peut se développer.
- L'apparition d'une direction singulière dans l'opérateur tangent  $\hat{K}_i^n|_{U_i^n}$  à un itéré quelconque  $U_i^n$ , rend possible une perturbation non nulle de la suite de solutions, d'amplitude quelconque, contrôlée par les dérivées tierces des forces intérieures. Les singularités proviennent toujours de l'opérateur lié aux modèles de comportement locaux  $R(U(t))$ . Elles peuvent être modifiées par les opérateurs de la dynamique  $M$  et  $C$ , ainsi que le pas de temps  $\Delta t$ .
- Les itérés suivants obtenus après l'apparition d'une singularité maintiennent cette perturbation, même si l'opérateur tangent retrouve sa régularité. Dans le cas où  $\frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)}$  est également singulier, la suite de solutions peut diverger dans cette direction.

On souligne cependant que cette analyse suppose des matrices exactement singulières, fait qui intervient rarement dans le cadre des simulations numériques. L'opérateur tangent peut en revanche être mal conditionné et représenté par une matrice singulière perturbée.

On sait, d'après les travaux de thèse de Jeannerod (2000), que les valeurs propres d'une matrice perturbée  $K + \eta \tilde{K}$  varient continument pour une perturbation  $\eta$  tendant vers zéro ( $\eta \tilde{K}$  est constituée par exemple des erreurs d'arrondis). Tant que  $K$  est régulière, les valeurs propres de la matrice perturbée ont pour termes dominants les valeurs propres de la matrice  $K$ . Si  $K$  possède une valeur propre nulle, alors les valeurs propres de la matrice perturbée ne varient pas plus que de l'ordre de  $\eta$ . En revanche, pour plusieurs valeurs propres nulles, les valeurs propres de la matrice perturbée peuvent être d'ordres supérieurs à  $\eta$ .

Dans le cadre de sa thèse Fernandes (2009a) a montré que les singularités des opérateurs tangents permettent d'induire des modes multiples de bifurcation. On voit d'après les résultats de Jeannerod (2000) qu'il est nécessaire d'obtenir un résidu de l'algorithme de Newton le plus faible possible au risque de générer des modes de bifurcations divergents, non liés au problème mécanique posé.

## 9.9 Perturbation de la suite des itérés de la méthode de Newton

Après avoir obtenu une solution de prédiction  $U_i^0$  supposée unique, établie à partir de l'opérateur  $K_{i-1}$  régulier, envisageons l'existence d'une perturbation  $w_i^n$  autour de l'itéré  $U_i^n$  qui constitue une autre suite de solutions admissibles au système d'équations itératives (équation 9.69). La régularité supposée de  $\hat{K}_{i-1}$  nous assure que  $w_i^0=0$ . L'expression des forces intérieures exprimées sous la forme du série de Taylor s'écrivent :

$$F_i^n(U_i^n + w_i^n, \dot{U}_i^n + \dot{w}_i^n, \ddot{U}_i^n + \ddot{w}_i^n) = R(U_i^n) + C(\dot{U}_i^n + \dot{w}_i^n) + M(\ddot{U}_i^n + \ddot{w}_i^n) + \dots \\ \dots \frac{\partial R}{\partial U} \Big|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} w_i^n + \frac{1}{2} w_i^n \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} w_i^n + o(w_i^n)^3 \quad (9.74)$$

L'équation 9.68 nous indique que  $\dot{w}_i^n$  et  $\ddot{w}_i^n$  sont du même ordre que  $w_i^n$ . La perturbation vérifie donc par hypothèse à l'itération de correction courante :

$$\hat{K}_i^n \Big|_{(U_i^n + w_i^n)} (\delta U_i^{n+1} + \delta w_i^{n+1}) = \hat{L}(t_i) - F_i^n(U_i^n + w_i^n, \dot{U}_i^n + \dot{w}_i^n, \ddot{U}_i^n + \ddot{w}_i^n) \quad (9.75)$$

Ce qui devient au second ordre près en  $w_i^n$  :

$$\hat{K}_i^n \Big|_{(U_i^n + w_i^n)} (\delta U_i^{n+1} + \delta w_i^{n+1}) = \hat{K}_i^n \Big|_{(U_i^n)} + w_i^n \frac{\partial \hat{K}_i^n}{\partial U} \Big|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} (\delta U_i^{n+1} + \delta w_i^{n+1}) = \dots \\ \dots \hat{L}(t_i) - R(U_i^n) - C(\dot{U}_i^n + \dot{w}_i^n) - M(\ddot{U}_i^n + \ddot{w}_i^n) - \dots \\ \dots \frac{\partial R}{\partial U} \Big|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} w_i^n - \frac{1}{2} w_i^n \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} w_i^n \quad (9.76)$$

En injectant l'équation 9.69, l'expression 9.76 s'écrit :

$$\hat{K}_i^n \Big|_{(U_i^n)} \delta w_i^{n+1} + C \dot{w}_i^n + M \ddot{w}_i^n + \frac{\partial R}{\partial U} \Big|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} w_i^n \dots \\ \dots + w_i^n \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} (\delta U_i^{n+1} + \delta w_i^{n+1}) = - \frac{1}{2} w_i^n \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} w_i^n \quad (9.77)$$

Soit aussi :

$$\hat{K}_i^n \Big|_{(U_i^n)} w_i^{n+1} + C \dot{w}_i^n + M \ddot{w}_i^n - \left( \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \right) w_i^n + w_i^n \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} \delta U_i^{n+1} \\ \dots = - w_i^n \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} \delta w_i^{n+1} - \frac{1}{2} w_i^n \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \Big|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} w_i^n \quad (9.78)$$

De plus, en dérivant l'expression 9.69 par rapport à  $U_i^n$ , on obtient :

$$\mathbf{v} \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \bigg|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} \delta U_i^{n+1} - \hat{K}_i^n \bigg|_{U_i^n} \mathbf{v} + \frac{\partial R}{\partial U} \bigg|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} \mathbf{v} = 0, \forall \mathbf{v} \quad (9.79)$$

En choisissant le vecteur  $\mathbf{v} = w_i^n$ , on obtient finalement :

$$\begin{aligned} w_i^n \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \bigg|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} \delta U_i^{n+1} - \hat{K}_i^n \bigg|_{U_i^n} w_i^n + \frac{\partial R}{\partial U} \bigg|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} w_i^n &= \dots \\ w_i^n \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \bigg|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} \delta U_i^{n+1} - \left( \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C \right) w_i^n &= 0 \end{aligned} \quad (9.80)$$

L'équation 9.78 prend alors la forme suivante au second ordre près en  $w_i^{n+1}$  :

$$\hat{K}_i^n \bigg|_{(U_i^n)} w_i^{n+1} + C \dot{w}_i^n + M \ddot{w}_i^n = \frac{1}{2} w_i^n \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \bigg|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} w_i^n - w_i^n \frac{\partial^2 R}{\partial U^2} \bigg|_{(U_i^n, \dot{U}_i^n, t_i)} w_i^{n+1} \quad (9.81)$$

## 9.10 Application du modèle de second gradient volumique à la dynamique

### Équations de la dynamique linéaire d'un milieu continu avec second gradient de dilatation

#### 9.10.1 Équations en petites transformations

Le travail virtuel des forces d'inertie (la masse volumique du solide est notée  $\rho$ ) n'est pas affecté par la modélisation avec second gradient. Le principe des travaux virtuels, les composantes de l'accélération en repère galiléen étant notées  $\gamma_i = u_{i,tt}$ , s'écrit alors :

Trouver  $\sigma$  et  $S$  tels que :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{ine} - \mathcal{W}_{def} + \mathcal{W}_{ext} = 0 \Leftrightarrow \\ \int_{\Omega} \rho \gamma_i u_i^* dv + \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij}(u^*) + S_j \eta_j(u^*)) dv = \int_{\Omega} f_i u_i^* dv + \int_{\partial\Omega_f} F_i u_i^* ds \quad \forall u^* \in \mathcal{V}_c \end{aligned} \quad (9.82)$$

Il conduit donc à la forme forte de l'équilibre (local) :

$$\sigma_{ij,j} + S_{j,kj} \delta_{ki} + f_i - \rho \gamma_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (9.83)$$

et les mêmes conditions aux limites naturelles qu'en statique du milieu continu avec second gradient de dilatation, auxquelles il faut ajouter les conditions initiales en  $u$  et  $u_{,t}$ .

#### 9.10.2 Modes de vibration en élasticité linéaire

Cette étude est restreinte au cadre de l'élasticité linéaire isotrope homogène (opérateur d'élasticité noté  $A$ , coefficients  $E$  et  $\nu$ ). La loi de comportement locale est élastique linéaire isotrope pour le second gradient de dilatation (opérateur noté  $B$ , scalaire  $b_s$  positif). On se concentre à présent sur l'étude des vibrations propres du solide, en admettant des solutions à variables séparées (Bamberger (1997))  $u(x,t) = U(x)f(t)$ , pour chaque instant sur la durée d'analyse  $t \in [0, t_f[$  du transitoire.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho U_i u_i^* \ddot{f}(t) dv + \int_{\Omega} \epsilon_{kl}(U) A_{ijkl} \epsilon_{ij}(u^*) f(t) dv + \dots \\ \dots \int_{\Omega} \eta_j(U) b_s \eta_j(u^*) f(t) dv = 0 \quad \forall u^* \in \mathcal{V}_0 \end{aligned} \quad (9.84)$$

$\mathcal{V}_0$  est l'espace vectoriel des champs admissibles, vérifiant les conditions aux limites.

La fonction  $\ddot{f}(t)/f(t) = -\omega^2$  est nécessairement indépendante du temps. On en

déduit que la formulation variationnelle associée au problème aux modes  $U(x)$  et valeurs propres  $\omega^2 > 0$  s'écrit :

$$-\omega^2 \int_{\Omega} \rho U_i u_i^* dv + \int_{\Omega} \epsilon_{kl}(U) A_{ijkl} \epsilon_{ij}(u^*) dv + \int_{\Omega} \eta_j(U) b_s \eta_j(u^*) dv = 0 \quad \forall u^* \in \mathcal{V}_1 \quad (9.85)$$

On fait ainsi apparaître le coefficient de Rayleigh :

$$\omega^2(U) = \frac{\int_{\Omega} \epsilon_{kl}(U) A_{ijkl} \epsilon_{ij}(U) dv + \int_{\Omega} \eta_j(U) b_s \eta_j(U) dv}{\int_{\Omega} \rho U_i U_i dv} \quad \forall u^* \in \mathcal{V}_0 \quad (9.86)$$

La stationnarité sur l'ensemble des modes  $U(x)$  admissibles équivaut à la formulation variationnelle du problème aux modes et valeurs propres, chacun associé à la fonction du temps  $f(t) = \Re(e^{i\omega t + \phi})$ , avec la pulsation  $\omega \in \mathbb{R}_+$ , pour donner la solution transitoire. L'énergie associée au second gradient de dilatation contribue ainsi à la raideur du système.

Les conditions aux limites naturelles du problème aux limites du mode propre s'écrivent :

en terme de forces normales au bord (en prenant des déplacements virtuels normaux) :

$$\sigma_{nn} - S_{j,j} = 0 \Rightarrow A_{nmkl} U_{k,l} - b_s U_{k,kj} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega_f \quad (9.87)$$

en terme de forces tangentielles au bord (en prenant des déplacements virtuels tangentiels) :

$$\sigma_{t_\alpha n} - S_{n,t_\alpha} = 0 \Rightarrow A_{t_\alpha nkl} U_{k,l} - b_s U_{k,kt_\alpha n} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega_f \quad (9.88)$$

et selon la direction  $\partial_n u_n^*$  :

$$S_j n_j = S^n = 0 \Rightarrow U_{k,kn} = 0 \quad \text{sur } \partial \Omega \quad (9.89)$$

### 9.10.3 Application aux mouvements propres d'une couche de sol élastique

#### 9.10.3.1 Modes de vibration en élasticité linéaire

On considère une couche de sol linéaire élastique isotrope, de hauteur  $H$ , reposant sur un substratum rocheux supposé rigide, voir figure 9.41. Les propriétés matériau sont

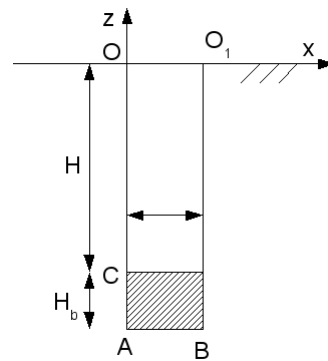


Illustration 9.41 : Couche de sol de hauteur  $H$  sur un substratum rocheux

données par un module d'Young  $E$  et un module de cisaillement  $G = E/(2(1+\nu))$ . Les sollicitations traitées seront successivement des vibrations longitudinales  $u_z(z, t)$  (vérifiant  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{xz} = 0$ ) puis des vibrations de cisaillement  $u_x(z, t)$  (vérifiant  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = 0$ ). Les équations du mouvement résultent de l'équilibre élastique, respectivement :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz,z} - \rho \gamma_z &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} u_{z,zz} - \rho \ddot{u}_z = 0 \\ \sigma_{xz,z} - \rho \gamma_x &= G u_{x,zz} - \rho \ddot{u}_x = 0 \end{aligned} \quad (9.90)$$

Pour les vibrations longitudinales, les solutions ondulatoires recherchées sont supposées prendre la forme  $u_z(z, t) = \Re \left( \sum_j U_{zj}^l(z) e^{i\omega_j t} \right)$ , avec des modes de type  $U_z = c e^{ikz}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  étant une constante et  $k$  étant le nombre d'onde ; de même pour les vibrations en cisaillement.

On note par  $V_l = \sqrt{E(1-\nu)/(\rho(1+\nu)(1-2\nu))}$  et  $V_s = \sqrt{G/\rho}$  les vitesses des ondes élastiques longitudinales et de cisaillement dans la couche (Gibert, 1988). La relation de « dispersion » déduite des équations du mouvement s'écrit simplement respectivement :  $k^l = \pm \omega/V_l$  et  $k^s = \pm \omega/V_s$ . Les solutions des ondes longitudinales sont donc propagatives et non-dispersives, de la forme :

$$u_z(z, t) = \Re \left( \sum_j U_{zj}^l(z) e^{i\omega_j t} \right) = \Re \left( \sum_j U_j(z) e^{ik_j(z \pm V_l t)} \right) \quad (9.91)$$

En écrivant le respect des conditions aux limites de blocage en  $z = -H$  :  $U(-H) = 0$  et de surface libre en  $z = 0$  :  $U_{,z}(0) = 0$ , on obtient la suite dénombrable de modes propres unidimensionnels longitudinaux (nombre d'onde  $k_j^l = \pm 2\pi f_j^l/V_l$ ) et de cisaillement (nombre d'onde  $k_j^s = \pm 2\pi f_j^s/V_s$ ) suivante :

$$U_{zj}^l(z) = \cos\left(\frac{\pi z(2j-1)}{2H}\right) \quad \text{et} \quad U_{xj}^s(z) = \cos\left(\frac{\pi z(2j-1)}{2H}\right) \quad (9.92)$$

associés aux fréquences suivantes respectives :

$$f_j^l = (2j-1) \frac{V_l}{4H} \quad \text{et} \quad f_j^s = (2j-1) \frac{V_s}{4H} \quad \text{pour } j \in \mathbb{N}^+ \quad (9.93)$$

### 9.10.3.2 Modes de vibration en élasticité linéaire avec second gradient de dilatation

Après avoir établi les solutions pour une cinématique de premier gradient, nous nous intéressons au modèle de second gradient de dilatation. On notera pour la suite du document :



$$\beta = \frac{b_s(1+\nu)(1-2\nu)}{E} = \frac{b_s(1-\nu)}{\rho V_l^2} \quad (9.94)$$

Les équations du mouvement résultent de l'équilibre élastique, respectivement :

(9.95)

Les modes de vibration de cisaillement ne sont pas affectés par le second gradient de dilatation. En revanche, les modes et pulsations propres de vibration longitudinale sont solutions d'un nouveau problème de minimisation du quotient de Rayleigh :

$$\omega^2(U) = \frac{\int_{\Omega} E(1-\nu) U_{z,z}^2 dv + (1+\nu)(1-2\nu) \int_{\Omega} b_s U_{z,zz}^2 dv}{(1+\nu)(1-2\nu) \int_{\Omega} \rho U_i U_i dv} \quad \forall u^* \in \mathcal{V}_0 \quad (9.96)$$

Le problème variationnel associé admet comme équation d'Euler l'équation locale déduite de l'équation locale d'équilibre dynamique écrite plus haut :

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu) U_{z,zz} - \beta U_{z,zzzz}) + \rho \omega^2 U_z = 0 \quad (9.97)$$

La relation de « dispersion » peut être obtenue en supposant un mode de vibration du type  $U(z) = c e^{ikz}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  étant une constante et  $k$  étant le nombre d'onde :

$$\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\beta k^4 + (1-\nu) k^2) - \rho \omega^2 = 0 \Leftrightarrow V_l^2 \left( \frac{\beta}{1-\nu} k^4 + k^2 \right) - \omega^2 = 0 \quad (9.98)$$

Les solutions complexes de l'équation 9.98 sont les suivantes :

$$\begin{aligned} k &= \pm \sqrt{-\frac{1-\nu}{2\beta} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\beta\omega^2}{V_l^2(1-\nu)}} \right)} \\ &= \pm \sqrt{\frac{-E(1-\nu) \pm \sqrt{E^2(1-\nu)^2 + 4b_s(1+\nu)^2(1-2\nu)^2\rho\omega^2}}{2b_s(1+\nu)(1-2\nu)}} \end{aligned} \quad (9.99)$$

Ces ondes sont dispersives. La vitesse de phase  $\omega/k$  et la vitesse de groupe (qui régit la propagation de l'énergie)  $\frac{d\omega}{dk} = V_l^2 \frac{k}{\omega} \left( 2\frac{\beta}{1-\nu} k^2 + 1 \right)$  diffèrent donc de la vitesse des ondes élastiques  $V_l$  (sans second gradient) et dépendent de la longueur d'onde  $\frac{2\pi}{\Re(k)}$ .

Deux nombres d'ondes sont réels, les deux autres sont imaginaires purs. C'est également le cas pour le modèle de flexion d'une poutre avec cisaillement

(cinématique de Timoshenko (Gibert, 1988)).

La répartition spatiale de chaque mode est donc une combinaison :

$$U(z) = c_1 \cos k_1 z + c_2 \sin k_1 z + c_3 \cosh k_2 z + c_4 \sinh k_2 z \quad (9.100)$$

avec les réels :

$$\begin{cases} k_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu) + \sqrt{E^2(1-\nu)^2 + 4b_s(1+\nu)^2(1-2\nu)^2\rho\omega^2}}{2b_s(1+\nu)(1-2\nu)}} \\ k_2 = \sqrt{\frac{-E(1-\nu) + \sqrt{E^2(1-\nu)^2 + 4b_s(1+\nu)^2(1-2\nu)^2\rho\omega^2}}{2b_s(1+\nu)(1-2\nu)}} \end{cases} \quad (9.101)$$

Pour un paramètre  $\beta$  « petit » par rapport au carré de la longueur d'onde élastique  $\lambda = 2\pi V_l/\omega$  (c'est à dire pour une longueur caractéristique du second gradient petite devant la longueur d'onde élastique longitudinale), on a les deux nombres d'onde réels, développés au 1<sup>er</sup> ordre en  $\beta/\lambda^2$ , pour des modes ondulatoires :

$$k \approx \frac{\pm\omega}{V_l} \left( 1 - \frac{\beta\omega^2}{32\pi^2 V_l^2} \right) \quad (9.102)$$

sachant que les deux autres nombres d'onde, imaginaires, ont un module qui tend vers l'infini, donc correspondant à des solutions de très haute fréquence, que l'on ne considèrera pas dans une situation sismique (on admet en général  $f < 33\text{Hz}$  ).

La vitesse de groupe  $\frac{d\omega}{dk}$  est alors égale à  $V_l \left( 1 - \frac{\pi^2 \beta^2}{(1-\nu)\lambda^4} \right)$  au 4<sup>ème</sup> ordre en  $\beta/\lambda^2$ .

Pour obtenir les constantes  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  et  $c_4$  non nulles caractérisant les modes, il faut exploiter les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} U_z(-H) &= 0 = c_1 \cos k_1 H - c_2 \sin k_1 H \dots \\ &\dots + c_3 \cosh k_2 H - c_4 \sinh k_2 H \\ U_{z,z}(0) - bU_{z,zzz}(0) &= 0 \Rightarrow \beta(1-\nu)(k_1 c_2 + k_2 c_4) + (k_1^3 c_2 - k_2^3 c_4) = 0 \quad (9.103) \\ U_{z,zz}(0) &= 0 = -k_1^2 c_1 + k_2^2 c_3 \\ U_{z,zz}(-H) &= 0 \Rightarrow -k_1^2(c_1 \cos k_1 H - c_2 \sin k_1 H) \dots \\ &\dots + k_2^2(c_3 \cosh k_2 H - c_4 \sinh k_2 H) = 0 \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système doit être nul pour obtenir des solutions non triviales. Cette condition introduit dans les nombres d'ondes une dépendance à la hauteur  $H$

de la colonne de sol. En pratique, on aura une valeur  $k_j H$  plutôt faible (les longueurs d'onde ont un ordre de grandeur proche de la hauteur de couche de sol). Il devient par conséquent difficile de négliger les termes exponentiels  $e^{k_j H}$  dans le système ci-dessus.

#### 9.10.4 Application aux mouvements propres d'une couche de sol poro-élastique

##### 9.10.4.1 Modes de vibration en poro-élasticité linéaire

On néglige ci-après, hypothèse proposée par Zienkiewicz et al. (1980) (cité par Coussy (2004)), les forces d'inertie provenant de l'écoulement relatif du fluide par rapport au milieu poreux lui-même, dont le déplacement est noté  $u(z, t)$ . Le milieu poreux a une masse volumique homogénéisée  $\rho$ . Le coefficient de Biot  $b_B$  est supposé égale à 1 (couplage poro-élastique, qui définit les contraintes effectives) et une saturation  $S_{lq}$  égale à 1. La masse volumique du fluide (l'eau) est égale à  $\rho_{lq} = 1000 \text{ kg/m}^3$  et la perméabilité hydraulique du milieu à l'eau  $\kappa_{lq}^H = \frac{K^{\text{int}}(\phi) \cdot k_{lq}^{\text{rel}}(S_{lq})}{\mu_{lq}(T)}$  (mesurée en  $\text{m}^3 \text{s/kg}$ ). Les termes intervenant dans la définition de la perméabilité hydraulique sont les perméabilités intrinsèque et relative et la viscosité dynamique de l'eau à la température ambiante. Finalement la perméabilité est donnée par la relation  $K = \kappa_{lq}^H \rho_{lq} g$ , avec l'accélération de pesanteur. Le coefficient caractéristique de consolidation  $c_v = \lambda_{lq}^H E / b_B^2$  pilote la durée du processus de consolidation quasi-statique (90% de la consolidation est atteinte après un délai de  $t_c = H^2 / c_v$ ).

Les mouvements propres vibratoires élastiques de cisaillement ne sont pas affectés par l'écoulement du fluide : la solution est la même qu'en élasticité.

Les mouvements propres vibratoires longitudinaux verticaux  $u_z(z, t)$  vérifiant  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{xz} = 0$  accompagnés du champ de pression de fluide interstitiel  $p(z, t)$  de la colonne de sol poro-élastique sont régis par les équations suivantes :

$$\begin{cases} E \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} u_{z,zz}(z, t) - p_{,z}(z, t) - \rho u_{z,tt}(z, t) = 0 & \text{mécanique} \\ \kappa_{lq}^H p_{,zz}(z, t) - u_{z,zt}(z, t) = 0 & \text{hydraulique} \end{cases} \quad (9.104)$$

On note  $V_l = \sqrt{\left( \frac{E}{\rho} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right)}$  la vitesse des ondes élastiques longitudinales

et le nombre sans dimension  $\alpha = \frac{\kappa_{lq}^H E}{H V_l (1+\nu)(1-2\nu)}$  qui pilote l'échelle de

temps de consolidation comme en quasi-statique,  $H$  étant la hauteur de la colonne de sol.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

- blocage en déplacement au pied de la colonne :  $u_z(-H, t) = 0$
- étanchéité au pied de la colonne :  $p_{,z}(-H, t) = 0$
- surface libre en tête:  $p_{,z}(0, t) = 0$  et  $\sigma_{zz}(0, t) = 0 = \rho V_l^2 u_{z,z}(0, t) - p(0, t)$

Le système différentiel régissant les mouvements propres vibratoires se réduit sous forme adimensionnelle de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tilde{u}'' - \tilde{p}' - \tilde{u} = 0 & \text{mécanique} \\ \alpha \tilde{p}'' - \dot{\tilde{u}} = 0 & \text{hydraulique} \end{cases} \quad \text{dans } ]0, 1[ \times ]-\infty, +\infty[ \quad (9.105)$$

Ayant introduit :  $z = H(\xi - 1)$  ,  $t = \tau H / V_l$  ,  $\tilde{u} = u_z / H$  ,  $\tilde{p} = p / \rho V_l^2$  et les notations des dérivées partielles :  $f' = f_{,\xi}$  et  $\dot{f} = f_{,\tau}$  .

On cherche les solutions non triviales du système 9.105 du type  $\tilde{u}(\xi, \tau) = \bar{U} \cdot e^{i\tilde{y}\xi} \cdot e^{i\tilde{\omega}\tau}$  ,  $\tilde{u}(\xi, \tau) = \bar{P} \cdot e^{i\tilde{y}\xi} \cdot e^{i\tilde{\omega}\tau}$  avec  $\tilde{y} \neq 0$  et  $\tilde{\omega}$  complexes. On obtient ainsi la relation de dispersion (liant la longueur d'onde à la pulsation complexe) :

$$\begin{vmatrix} -\gamma^2 - \omega^2 & -i\gamma \\ \gamma\omega & -\alpha\gamma^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \tilde{y} = \pm i \sqrt{\frac{\tilde{\omega}(\alpha\tilde{\omega} + i)}{\alpha}} \quad (9.106)$$

Les ondes présentent donc également un caractère dispersif. Les conditions aux limites homogènes sur le domaine  $]0, 1[$  sont :  $\tilde{u}(0, \tau) = 0$  ,  $\tilde{p}'(0, \tau) = 0$  ,  $\tilde{u}'(1, \tau) = 0$  et  $\tilde{p}(1, \tau) = 0$  .

Les solutions prennent donc nécessairement les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{u}(\xi, \tau) &= \bar{U} \cdot \Re \left( \left( e^{-i\tilde{y}\xi} - e^{i\tilde{y}\xi} \right) e^{i\tilde{\omega}\tau} \right) \\ \tilde{p}(\xi, \tau) &= \bar{P} \cdot \Re \left( \left( e^{-i\tilde{y}\xi} - e^{i\tilde{y}\xi} \right) e^{i\tilde{\omega}\tau} \right) \end{cases} \quad (9.107)$$

Avec  $e^{-i\tilde{y}} + e^{i\tilde{y}} = 0$  , soit :

$$\tilde{y} = \bar{k} \quad \text{avec } \bar{k} \in \Re \quad \text{et } \cos(\bar{k}) = 0 \quad \text{soit } \bar{k}_m = (2m-1)\pi/2 \quad \text{avec } m = 1, 2, 3, \dots$$

On obtient alors la famille dénombrable des pulsations complexes adimensionnelles :

$$\tilde{\omega}_m^\pm = \frac{1}{2\alpha} \left( i \pm \sqrt{1 - 4\alpha^2 \bar{k}_m^2} \right) \quad (9.108)$$

La vitesse de groupe (qui régit la propagation de l'énergie) est  $\frac{d\tilde{\omega}}{d\bar{k}} = \frac{\mp 4\alpha \bar{k}_m}{\sqrt{1 - 4\alpha^2 \bar{k}_m^2}}$ .

La valeur  $\hat{\alpha} = 1/\pi \approx 0,3183$  (pour  $m=1$ ) constitue la transition entre un cas,  $\alpha > \hat{\alpha}$  où le régime d'ondes sera uniquement ondulatoire évanescent (ceci est du au terme imaginaire dans la pulsation,  $\forall m$ , la vitesse de groupe est alors imaginaire) et un cas  $\alpha < \hat{\alpha}$  de régime mixte propagatif-évanescent.

La relation de dispersion en poro-élasticité n'est pas analogue à celle d'un milieu visco-élastique (de coefficient  $c$ ):  $\omega = \frac{c}{2\rho} k \left( 1 \pm \sqrt{1 + 4V_l^2 \rho^2 / c^2} \right)$  avec  $k \in \mathbb{R}$ .

Pour un milieu poreux très perméable, c'est à dire  $\alpha \rightarrow +\infty$ , on retrouve l'expression de la relation de dispersion en élasticité ordinaire:  $\tilde{\gamma} = \pm \tilde{\omega} \Leftrightarrow k = \pm \omega / V_l$ . En effet, dans ce cas les pressions s'équilibrent et ne jouent plus sur la réponse du système.

Pour un milieu poreux quasi-imperméable, c'est à dire  $\alpha \rightarrow 0$ , on est dans le cas d'une perturbation singulière.

#### 9.10.4.2 Modes de vibration en poro-élasticité linéaire avec second gradient de dilatation

L'objet de ce paragraphe consiste à introduire la modélisation avec second gradient de dilatation. On note toujours  $\beta = \frac{b_s(1+\nu)(1-2\nu)}{E} = \frac{b_s(1-\nu)}{\rho V_l^2}$ . On garde les mêmes hypothèses de modélisation du milieu poreux que ci-dessus. Les mouvements propres longitudinaux verticaux  $u_z(z, t)$  vérifiant  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{xz} = 0$  accompagnés du champ de pression de fluide interstitiel  $p(z, t)$  de la colonne de sol poro-élastique sont régis par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{E((1-\nu)u_{z,zz}(z, t) - \beta u_{z,zzzz}(z, t) - p_{,z}(z, t) - \rho u_{z,tt}(z, t))}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0 & \text{mécanique} \\ \kappa_{lq}^H p_{,zz}(z, t) - u_{z,zt}(z, t) = 0 & \text{hydraulique} \end{cases} \quad (9.109)$$

Ce système (9.109) se réduit sous forme adimensionnelle de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{u}'' - \frac{\beta}{H^2(1-\nu)} \tilde{u}'''' - \tilde{p}' - \tilde{u} = 0 & \text{mécanique} \\ \alpha \tilde{p}'' - \tilde{u}' = 0 & \text{hydraulique} \end{array} \right. \quad \text{dans } ]0, 1[ \times ]-\infty, +\infty[ \quad (9.110)$$

Avec les mêmes choix de variables adimensionnelles que précédemment. La relation de dispersion associée à ce système différentiel, reliant les pulsations adimensionnelles de solutions modales vibratoires du type  $\tilde{u}(\xi, \tau) = \bar{U} \cdot e^{i\tilde{\gamma}\xi} \cdot e^{i\tilde{\omega}\tau}$ ,  $\tilde{u}(\xi, \tau) = \bar{P} \cdot e^{i\tilde{\gamma}\xi} \cdot e^{i\tilde{\omega}\tau}$  aux nombres d'ondes adimensionnels avec  $\tilde{\gamma} \neq 0$  et  $\tilde{\omega}$  complexes s'écrit :

$$\frac{\beta \tilde{\gamma}^4}{H^2(1-\nu)} + \tilde{\gamma}^2 + \frac{\alpha \tilde{\omega}^2 + i \tilde{\omega}}{\alpha} = 0 \quad (9.111)$$

Soit les quatre nombres d'ondes adimensionnels :

$$\tilde{\gamma} = \pm \sqrt{\frac{H^2(1-\nu)}{2\beta} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\beta(\alpha \tilde{\omega}^2 + i \tilde{\omega})}{\alpha H^2(1-\nu)}} \right)} \quad (9.112)$$

Les ondes ont donc également un caractère dispersif. Les conditions aux limites homogènes sur le domaine  $]0, 1[$  sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{u}(0, \tau) &= 0 \\ \tilde{u}''(0, \tau) &= 0 \\ \tilde{p}'(0, \tau) &= 0 \\ \tilde{u}'(1, \tau) &= \frac{\beta}{H^2(1-\nu)} \tilde{u}'''(1, \tau) \\ \tilde{u}''(1, \tau) &= 0 \\ \tilde{p}(1, \tau) &= 0 \end{array} \right. \quad (9.113)$$

Le déterminant du système linéaire construit avec ces conditions sur les composantes  $\bar{U}$  et  $\bar{P}$  doit être nul afin d'avoir des solutions non triviales, ce qui donne une condition sur les nombres d'onde adimensionnels.

Pour une valeur faible du coefficient  $\frac{\beta \tilde{\omega}}{H^2}$ , c'est à dire pour une longueur caractéristique du second gradient petite devant la longueur d'onde élastique longitudinale, l'expression de  $\tilde{\gamma}$  développée au 1<sup>er</sup> ordre permet d'obtenir les deux nombres d'onde suivants :

$$\tilde{\gamma} \approx \pm \sqrt{\frac{\tilde{\omega}(\alpha \tilde{\omega} + i)}{\alpha}} \left( 1 - \frac{\beta \tilde{\omega}(\alpha \tilde{\omega} + i)}{\alpha H^2(1-\nu)} \right) \quad (9.114)$$

Les deux autres nombres d'onde ont un module qui tend vers l'infini, correspondant

donc à des solutions de très haute fréquence, non prise en compte dans une situation sismique (  $f < 33 \text{ Hz}$  ). On vérifie bien qu'en supprimant le terme de second gradient de dilatation dans l'énergie libre (  $\beta = 0$  ), on retrouve l'expression de dispersion en poro-élasticité ordinaire (§9.10.4.1 ).

### 9.11 Tenseur élastoplastique du modèle Hujeux type Cam-Clay (HCC)

Pour la suite du problème étudié, le modèle de comportement local appliqué au premier gradient est issu du modèle de Hujeux simplifié. Un unique mécanisme plan déviatoire monotone est considéré et les paramètres sont choisis de telle sorte à retrouver le modèle de Cam-Clay original limité à un plan, en posant  $b=1$ ,  $r_{el}=1$ . La surface de charge du modèle prend alors la forme suivante:

$$f_k = q_k + Mp_k \left( 1 - \ln \left( \frac{p_k}{P_c (\epsilon_v^p)} \right) \right), \text{ avec } \begin{cases} p_k &= \frac{\sigma_{ii} + \sigma_{jj}}{2} \\ q_k &= \sqrt{\frac{1}{2} (s_k)_{ij} : (s_k)_{ij}} \\ (s_k)_{ij} &= (\sigma_k)_{ij} - p_k (\delta_k)_{ij} \\ P_c &= P_{c0} \exp(-\beta \epsilon_v^p) \end{cases} \quad (9.115)$$

Les règles d'écoulement plastique sont données par l'expression suivante:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} (\Psi_k)_{ij} \text{ avec } (\Psi_k)_{ij} = \frac{(s_k)_{ij}}{2q_k} - \frac{1}{2} \left( \sin \psi + \frac{q_k}{p_k} \right) I_{ij} \text{ et } I_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.116)$$

$\dot{\lambda}$  représente le multiplicateur plastique obtenu à partir de l'équation de consistance,  $\dot{f}_k = 0$ .

La partie élastique ou de décharge plastique du modèle constitutif local est contrôlé par la relation suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K + \frac{4}{3}G & K - \frac{2}{3}G & 0 \\ K - \frac{2}{3}G & K + \frac{4}{3}G & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{12} \end{bmatrix} \quad (9.117)$$

avec  $K$  et  $G$  les modules de compressibilité et de cisaillement respectivement.

Pour la suite de l'exemple traité, il est intéressant d'exprimer sous sa forme explicite la matrice constitutive élasto-plastique du modèle 2D dans le but d'analyser l'influence des paramètres matériaux et de l'état de contraintes sur la réponse finale de la structure. Le tenseur se construit d'après l'expression suivante:

$$\dot{\sigma}_{ij} = H_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl} = \left( H_{ijkl}^e - \frac{H^e \cdot \Psi \otimes \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot H^e}{h + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot H^e \cdot \Psi} \right) \cdot \dot{\epsilon}_{kl} \quad (9.118)$$



Les différents termes de  $H_{ijkl}^{ep}$  sont donnés ci-dessous:

$$H_{1111}^{ep} = K + \frac{4}{3}G - \frac{\left(G \frac{S_{11}^k}{q_k} - \left(K + \frac{G}{3}\right) \left(\sin \psi + \frac{q_k}{p_k}\right)\right) \left(G \frac{S_{11}^k}{q_k} - M \left(K + \frac{G}{3}\right) \ln \left(\frac{p_k}{P_c}\right)\right)}{A}$$

$$H_{1122}^{ep} = K - \frac{2}{3}G - \frac{\left(G \frac{S_{11}^k}{q_k} - \left(K + \frac{G}{3}\right) \left(\sin \psi + \frac{q_k}{p_k}\right)\right) \left(G \frac{S_{22}^k}{q_k} - M \left(K + \frac{G}{3}\right) \ln \left(\frac{p_k}{P_c}\right)\right)}{A}$$

$$H_{1112}^{ep} = - \frac{\left(G \frac{S_{11}^k}{q_k} - \left(K + \frac{G}{3}\right) \left(\sin \psi + \frac{q_k}{p_k}\right)\right) G \frac{S_{12}^k}{q_k}}{A}$$

$$H_{1211}^{ep} = - \frac{G \frac{S_{12}^k}{q_k} \left(G \frac{S_{11}^k}{q_k} - M \left(K + \frac{G}{3}\right) \ln \left(\frac{p_k}{P_c}\right)\right)}{A}$$

$$H_{1212}^{ep} = 2G - \frac{\left(G \frac{S_{12}^k}{q_k}\right)^2}{A}$$

$$H_{1222}^{ep} = - \frac{G \frac{S_{12}^k}{q_k} \left(G \frac{S_{22}^k}{q_k} - M \left(K + \frac{G}{3}\right) \ln \left(\frac{p_k}{P_c}\right)\right)}{A}$$

$$H_{2211}^{ep} = K - \frac{2}{3}G - \frac{\left(G \frac{S_{22}^k}{q_k} - \left(K + \frac{G}{3}\right) \left(\sin \psi + \frac{q_k}{p_k}\right)\right) \left(G \frac{S_{11}^k}{q_k} - M \left(K + \frac{G}{3}\right) \ln \left(\frac{p_k}{P_c}\right)\right)}{A}$$

$$H_{2212}^{ep} = - \frac{\left(G \frac{S_{22}^k}{q_k} - \left(K + \frac{G}{3}\right) \left(\sin \psi + \frac{q_k}{p_k}\right)\right) G \frac{S_{12}^k}{q_k}}{A}$$

$$H_{2222}^{ep} = K + \frac{4}{3}G - \frac{\left(G \frac{S_{22}^k}{q_k} - \left(K + \frac{G}{3}\right) \left(\sin \psi + \frac{q_k}{p_k}\right)\right) \left(G \frac{S_{22}^k}{q_k} - M \left(K + \frac{G}{3}\right) \ln \left(\frac{p_k}{P_c}\right)\right)}{A}$$

avec

$$A = G \left(\frac{S_{11}^k}{q_k}\right)^2 + G \left(\frac{S_{12}^k}{q_k}\right)^2 + M \left(K + \frac{G}{3}\right) \ln \left(\frac{p_k}{P_c}\right) \left(\sin \psi + \frac{q_k}{p_k}\right) + \frac{1}{2} \beta M p_k \left(\sin \psi + \frac{q_k}{p_k}\right)$$

## 9.12 Domaine des directions instables selon le critère de Rice

L'algorithme établi ci-dessous s'appuie sur les écrits du mémoire de thèse de Vossoughi (2001). La démonstration est menée pour un problème bi-dimensionnel.

Pour un problème en 2D,  $Q = n \cdot H \cdot n$ , le tenseur acoustique (éq. 6.30 pour le cas bilinéaire), est un tenseur d'ordre 2. On traite donc une matrice carrée 2x2 et on peut calculer directement le déterminant de  $Q$  :

$$\det(Q(n)) = \zeta_0 n_1^4 + \zeta_1 n_1^3 n_2 + \zeta_2 n_1^2 n_2^2 + \zeta_3 n_1 n_2^3 + \zeta_4 n_2^4 \quad (9.119)$$

avec

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= H_{1111} H_{1212} - H_{1112} H_{1211} \\ \zeta_1 &= H_{1111} H_{1222} - H_{1111} H_{2212} - H_{1112} H_{2211} - H_{1122} H_{1211} \\ \zeta_2 &= H_{1111} H_{2222} - H_{1112} H_{1222} - H_{1211} H_{2212} - H_{1122} H_{1212} - H_{1122} H_{2211} - H_{1212} H_{2211} \\ \zeta_3 &= H_{1112} H_{2222} - H_{1211} H_{2222} - H_{1122} H_{2212} - H_{1222} H_{2211} \\ \zeta_4 &= H_{1212} H_{2222} - H_{2212} H_{1222} \end{aligned}$$

Considérons les deux composantes du vecteur  $n$  ; soient  $n_1 = \cos \theta$  et  $n_2 = \sin \theta$  ( $\theta \in ]-\pi/2, \pi/2[$ ) et supposons  $\eta = \tan \theta$  : l'équation 9.119 prendra alors la forme suivante :

$$\det(Q(n)) = f(\eta) = \zeta_4 \eta^4 + \zeta_3 \eta^3 + \zeta_2 \eta^2 + \zeta_1 \eta + \zeta_0 = 0 \quad (9.120)$$

D'une manière générale, avant la localisation des déformations, le polynôme  $f(\eta)$  est positif dans tout le domaine.

En examinant le signe de la valeur minimale de ce polynôme, on peut détecter le début de la localisation. Il convient de préciser que tant que la valeur minimale de  $f(\eta)$  est positive, la localisation des déformations ne se manifeste pas dans le domaine au sens du critère de Rice.



### 9.13 Simulation d'un essai biaxial drainé sur sable d'Hostun à DR=40%

Les paramètres matériau ont été établis par Lopez-Caballero et al. (2003b) (tableau 9.7).

PARAMETRES	HOSTUN DR=40%	PARAMETRES	HOSTUN DR=40%
$P_0 (MPa)$	-0,1	<b>ETAT CRITIQUE + PLASTICITE PAR-FAITE</b>	
<b>ELASTICITE</b>		$\phi$	33
$K (MPa)$	148	$\beta$	30
$G (MPa)$	68	$d$	2,5
$n^e$	0	$b$	0,2
$P_{ref} (MPa)$	-1	$P_{c0} (MPa)$	-0,4
<b>LOI D'ECOULEMENT + ECROUISSAGE</b>		<b>SEUIL DES DOMAINES</b>	
$\psi$	33	$r_{d,mon}^{ela}$	0,010
$a_{mon}$	0,0170	$r_{d,cyc}^{ela}$	0,010
$a_{cyc}$	0,0001	$r_{hys}$	0,05
$c_{mon}$	0,08	$r_{mob}$	0,9
$c_{cyc}$	0,04	$r_{iso}^{ela}$	0,0001
$x^m$	1	$\alpha$	1

**Tableau 9.7 : Paramètres matériau du modèle de Hujeux pour le sable d'Hostun à DR=40% (Lopez-Caballero et al., 2003b)**

Le comportement du sable d'Hostun à DR=40% est présenté dans les plans classiques caractéristiques de la mécanique des sols,  $(p, q)$ ,  $(\epsilon_1, \eta)$ ,  $(p, \epsilon_v)$  et  $(\epsilon_1, \epsilon_v)$ . On retrouve sur les illustrations 9.42 et 9.43 les résultats avec le modèle HJS et le modèle de Hujeux complet. Les deux modèles fournissent des résultats très proches pour l'essai biaxial drainé pour les trois niveaux de confinement initial donné,  $\sigma_3 = [-50, -100, -150] kPa$ . Les déformations volumiques sont néanmoins plus importantes avec le modèle HJS que le modèle complet avant d'atteindre l'état critique du matériau.

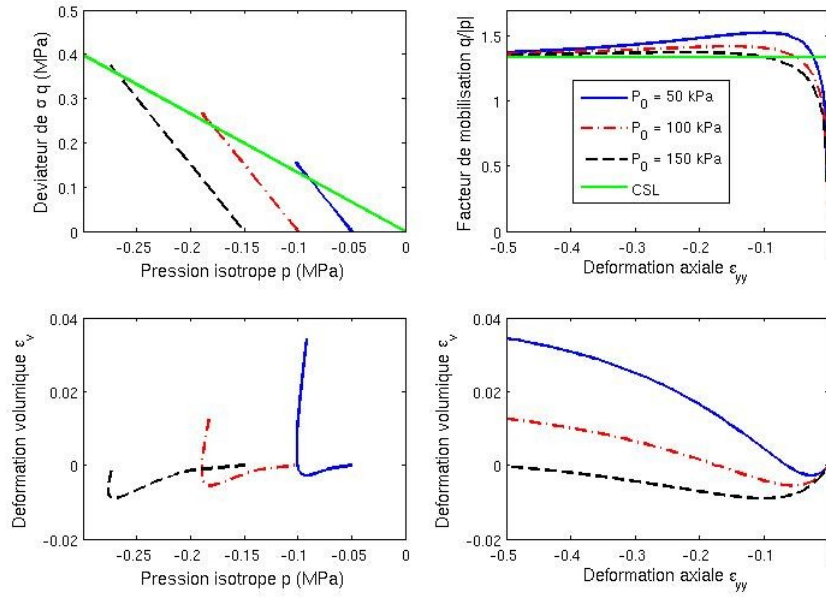


Illustration 9.42 : Réponse du modèle HJS à un essai biaxial drainé pour un sable d'Hostun à  $DR=40\%$

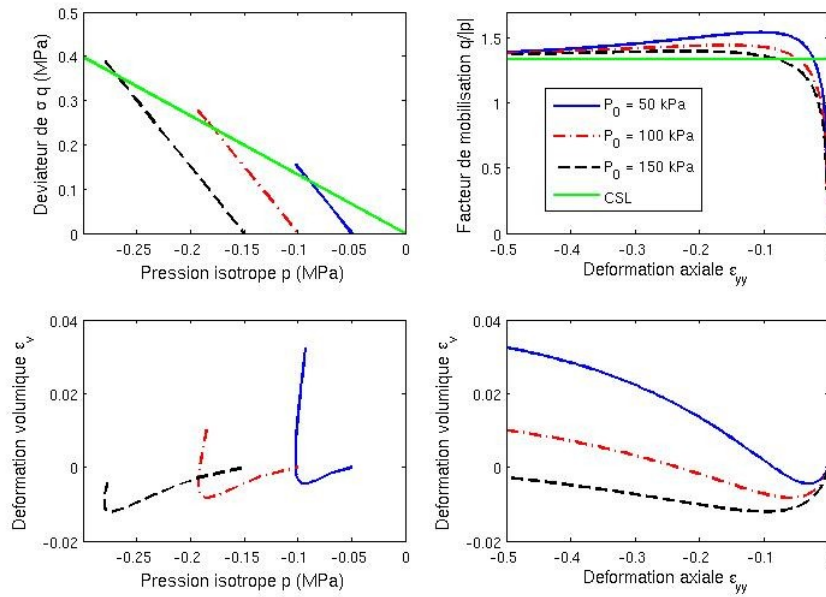


Illustration 9.43 : Réponse du modèle de Hujeux à un essai biaxial drainé pour un sable d'Hostun à  $DR=40\%$

La procédure mise en place pour le sable d'Hostun à  $DR=88\%$  est à présent appliquée au sable d'Hostun à  $DR=40\%$ . L'évolution de  $b_s$  en fonction de  $\sigma_3$  peut être assimilée à une droite (voir illustration 9.44). Un facteur de réduction de 50 a déjà été appliqué aux valeurs présentées pour une largeur de bande de 4 cm. Les résultats présentés ci-dessous ont en effet montré que ce facteur de réduction est sensible aux propriétés matériaux utilisées.

Les calculs menés avec le sable d'Hostun à  $DR=40\%$  ont posé plus de problèmes numériques que ceux effectués avec les paramètres matériaux du sable d'Hostun à  $DR=88\%$ . La convergence globale des calculs a pu être obtenue uniquement en utilisant une méthode de pilotage disponible dans Code\_Aster. En effet, même le recours à un algorithme de Newton-Raphson modifié n'a pas été en mesure de satisfaire la convergence du calcul avec ce jeu de paramètres. Notre choix pour la méthode de résolution itérative s'est alors porté sur la méthode de Newton Raphson modifié couplé à la méthode de pilotage présentée au §7.5.4.

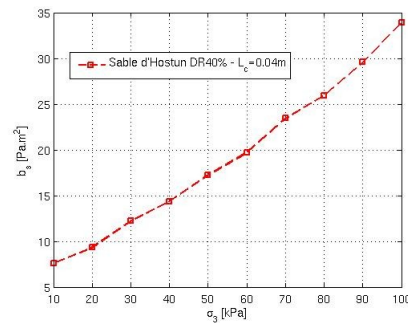


Illustration 9.44 : Évolution de  $b_s$  en fonction  $\sigma_3$  pour le sable d'Hostun à  $DR=40\%$  pour  $l_c=0,04\text{m}$  réduit d'un facteur 50

Hamadi (2006) a notamment montré que les cônes d'instabilités matérielles établis pour ce jeu de paramètres apparaissent plus tôt et sont plus larges que ceux obtenus pour le sable d'Hostun à  $DR=88\%$ , ce qui pourrait justifier les difficultés supplémentaires pour réaliser cette étude (illustration 9.45). Ces résultats ont également été retrouvés avec nos développements analytiques relatifs au modèle de Hujieux.

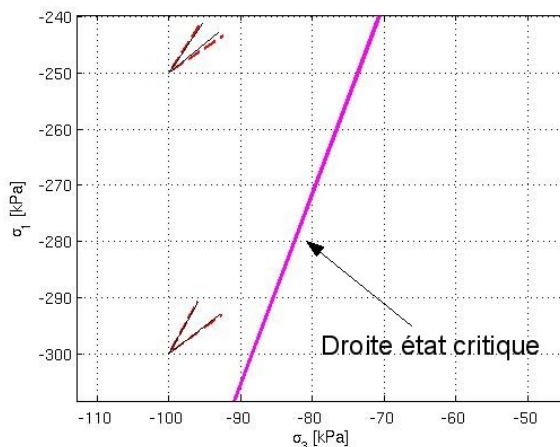


Illustration 9.45 : Cône d'instabilités pour un chemin biaxial drainé en déformations planes pour un sable d'Hostun à  $DR=40\%$  (rouge discontinu) et un à  $DR=88\%$  (noir continu)

importante, les résultats restent homogènes dans l'échantillon tant pour la réponse globale (illustration 9.46a) que pour l'état de déformations dans l'échantillon (illustration 9.46b).

Les simulations sur le sable d'Hostun à  $DR=40\%$  ont été réalisées pour le niveau de confinement initial  $\sigma_3=50\text{ kPa}$ . En se reportant aux valeurs estimées pour le module élastique du modèle de second gradient  $b_s$  (illustration 9.44), les résultats sont apparus concluant pour l'estimation de la zone d'influence, c'est à dire la largeur de bandes de cisaillement pour un facteur de réduction égal à 50 (illustration 9.46 et 9.47).

On peut noter que lorsque la valeur du module de rigidité est trop

La valeur du facteur de réduction évolue donc en fonction des propriétés matériaux considérées. Elle est établie à partir d'un principe d'essais erreurs tout en sachant que la largeur de la bande de cisaillement varie en  $\sqrt{b_s}$ .

L'idée directrice permettant de justifier l'évolution de ce facteur provient de la contribution des différents mécanismes plastiques du modèle de Hujeux, autre que l'unique mécanisme considéré dans le cadre du problème analytique abordé au §7.4.1.

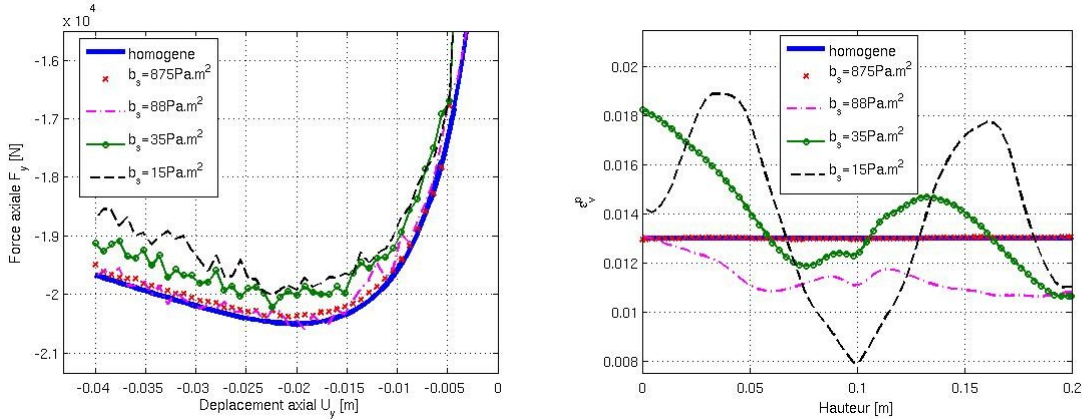


Illustration 9.46 : (gauche - a) Réponse globale de l'échantillon dans le plan force déplacement ; (droite - b) Profil de  $\epsilon_v^p$  selon une coupe centrale verticale ; pour un sable d'Hostun à  $DR=40\%$  ,  $\sigma_3=50 \text{ kPa}$  et  $b_s=[875;88;35;15] \text{ Pa.m}^2$  à  $U_y=3,2 \text{ cm}$  avec le modèle HJS

En vue de la section 7.6 où une étude stabilité de pente sera menée avec les propriétés matériaux présentées dans les tableaux 7.1 et 9.7 pour le modèle de Hujeux complet, il est nécessaire de quantifier le facteur de réduction à appliquer sur la valeur du module  $b_s$ , démarche préalablement menée pour le sable d'Hostun à  $DR=88\%$  (illustration 7.35). Les réponses du modèle de Hujeux complet ont en effet montré une différence quantitative sur  $\epsilon_v^p$  par rapport au modèle HJS (illustration 9.43) qui suppose une influence sur la valeur du facteur de réduction à appliquer.

L'essai biaxial simulé est à un confinement initial  $\sigma_3=50 \text{ kPa}$ . Le chargement est appliqué suivant une discrétisation de  $dU_y=0,02 \text{ mm}$ . Les résultats ont montré à nouveau la nécessité de réduire la valeur de  $b_s$  (illustration 9.48 et 9.49).

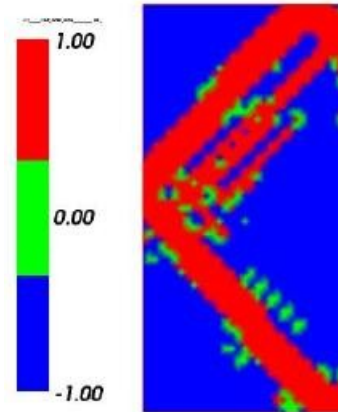


Illustration 9.47 : Indicateur de plasticité du mécanisme  $M_2^m$  du modèle HJS à  $U_y=3,2 \text{ cm}$  pour le sable d'Hostun à  $DR=40\%$  ,  $\sigma_3=50 \text{ kPa}$  et  $b_s=15 \text{ Pa.m}^2$

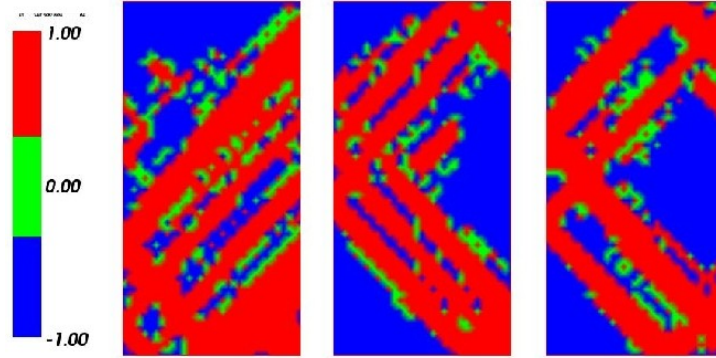


Illustration 9.48 : Indicateur de plasticité du mécanisme  $M_2^m$  du modèle de Hujeux complet à  $U_y = 3,2 \text{ cm}$  pour le sable d'Hostun à  $DR = 40\%$ ,  $\sigma_3 = 50 \text{ kPa}$  et  $b_s = [35, 15, 9] \text{ Pa.m}^2$  (valeur de  $b_s$  à affecter de gauche à droite)

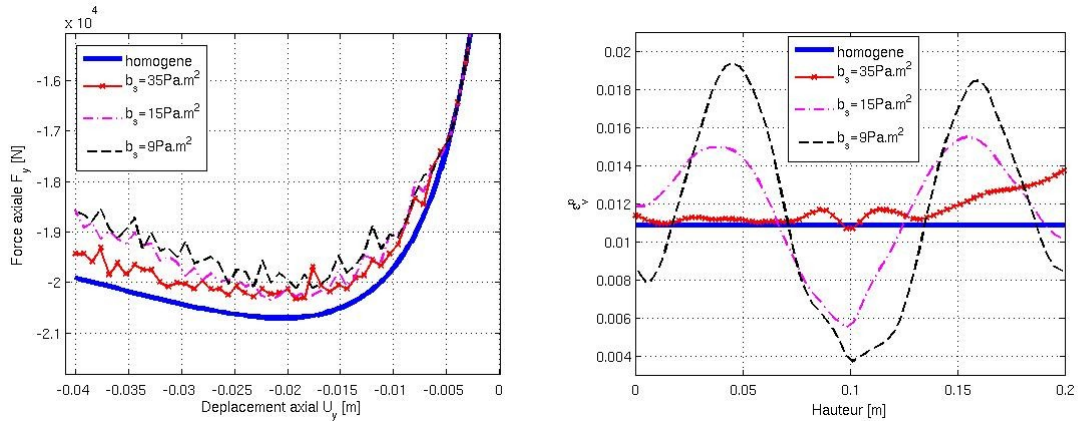


Illustration 9.49 : (gauche - a) Réponse globale de l'échantillon dans le plan force déplacement ; (droite - b) Profil de  $\epsilon_v^p$  selon une coupe centrale verticale ; pour un sable d'Hostun à  $DR = 40\%$ ,  $\sigma_3 = 50 \text{ kPa}$  et  $b_s = [875; 88; 35; 15] \text{ Pa.m}^2$  à  $U_y = 3,2 \text{ cm}$  avec le modèle de Hujeux complet





## 9.14 Analyse de stabilité de pente avec la méthode des tranches de Bishop

Une des méthodes utilisées dans l'ingénierie pour définir la stabilité d'un talus sous chargement d'une fondation superficielle est par exemple la méthode des tranches selon Bishop.

Le logiciel Talren 4 développé par Terrasol offre la possibilité de réaliser des études de stabilité de pente selon cette méthode. La charge limite obtenue est égale à 82kPa pour un sol modélisé avec un modèle de comportement de Mohr-Coulomb avec un angle de frottement égal à 33 degrés. Les illustrations 9.50a et 9.50b permettent de comparer les profils de rupture obtenus avec Code\_Aster et Talren 4. La discrétisation spatiale du maillage utilisé favorise le développement du mode de ruine présenté ci-dessous. Les indicateurs de plasticité du mécanisme  $M_3^m$  révèlent un mode de ruine où les surfaces de glissement évoluent (compris à l'interface entre les zones en décharge (bleu) et en charge (rouge), illustration 9.51).

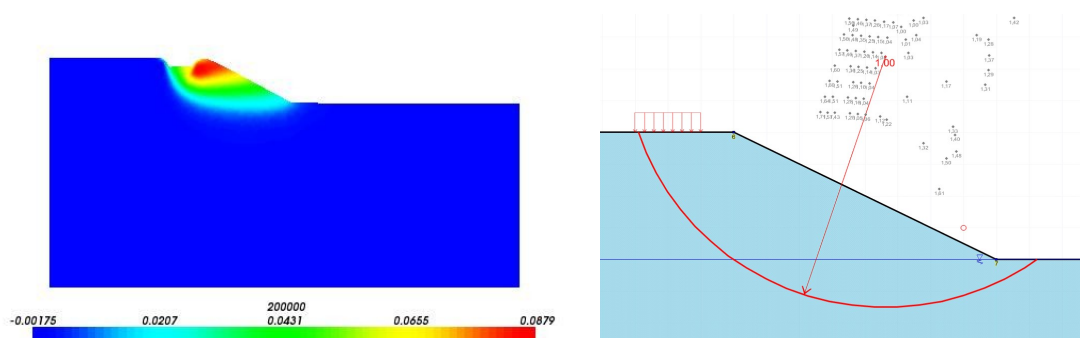


Illustration 9.50 : (gauche - a) Déformée horizontale (x4) du sol sous le chargement de la fondation superficielle en tête de talus après enfoncement de 10 cm, le sol étant modélisé par un modèle Hujoux modifié type Mohr-Coulomb avec écrouissage isotrope ; (droite – b) cercle de rupture obtenu avec Talren selon la méthode de Bishop



Illustration 9.51 : Visualisation au points de Gauss de l'indicateur de plasticité  $M_3^m$  sous le chargement de la fondation en tête de talus après enfoncement de 2 cm et 10 cm pour le modèle de Hujoux modifié type Mohr-Coulomb avec écrouissage isotrope

La définition du cercle de rupture sous Talren 4 conditionne également fortement la valeur de la charge limite. L'illustration 9.52 permet de constater dans le plan force déplacement en tête de talus au niveau de la fondation superficielle les différences obtenues entre les deux codes pour la charge limite supportée par le sol avant d'atteindre son état de rupture (91kPa avec Code\_Aster et 82kPa avec Talren 4). La

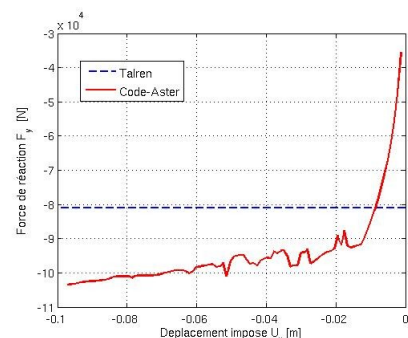


Illustration 9.52 : Charge appliquée sur la fondation située en tête de talus

différence entre les deux valeurs est de 10% mais peut être ramenée au profil de rupture plus grand sous Code\_Aster, qui sollicite une partie du massif non pris en compte par Talren 4 (illustration 9.51).

En conclusion de cette étude, les simulations réalisées sous Code\_Aster permettent de retrouver les valeurs de charge limite pour des modèles de comportement simplifié, en comparaison des résultats obtenus par les méthodes de dimensionnement classiques type méthode des tranches de Bishop. Ce point est important, car il permet d'avoir une confiance raisonnable sur les résultats obtenus pour des modèles de comportement plus évolués.

## 10 Bibliographie

- N. Abou-Bekr. Modélisation du comportement mécanique et hydraulique des sols partiellement saturés. Thèse de doctorat, *École Centrale Paris*, 1995.
- A. Ahadi, S. Krenk. Implicit integration of plasticity models for granular materials. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 192 : 3471-3488, 2003.
- KA Alshibli, SN Batiste, S. Sture. Strain localization in Sand : Plane Strain versus Triaxial Compression. *J. Geotechnical Geoenvironmental Engng*, 129(6) : 483-494, 2003.
- A. Al-Tabbaa. *Permeability and stress-strain response of speswhite kaolin*. Thèse de doctorat, Université de Cambridge, 1987.
- A. Al-Tabbaa et D. M. Wood. An experimentally based bubble model for clay. *Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Numerical Models in Geomechanics*, Niagara Falls, 91-99, 1989.
- S. Andrieux, M. Joussement et E. Lorentz. Une classe de modèles de comportement avec gradients de variables internes : construction par homogénéisation. *Paris, C.R.Acad.Sci.*, T323, Série IIb :629-636, 1996.
- F. Armero et K. Garikipati. Recent Advances in the Analysis and Numerical Simulation of Strain Localisation in Inelastic Solids. In D. Owen, E. Onate and E. Hinton (Eds), *Proceedings of Computational Plasticity IV, Barcelona*, pp. 547-561. CIMNE, 1995.
- F. Armero, A. Pérez-Foguet. On the formulation of closest point projection algorithms in elastoplasticity. Part I : The variational structure. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 53(2) :297-329, 2002.
- H. Askes, J. Pamin et R. de Borst. Dispersion analysis and element free Galerkin solutions of second and fourth order gradient-enhanced damage models. *Int. J. Num. Meth. Engrg*, 49 :811-832, 2000.
- H. Askes, L.J. Sluys. Explicit and implicit gradient series in damage mechanics. *European Journal of Mechanics – A/Solids*, 21(3) :379-390, 2002.
- D. Aubry, JC Hujeux, F. Lassoudière et Y. Meimon. A double memory model with multiple mechanisms for cyclic soil behavior. *Int. Symp. on Numerical Models in Geomechanics*, Zürich, p.3-13, 1982.
- D. Aubry, A. Modaressi, H. Modaressi. A constitutive model for cyclic behaviour of interfaces with variable dilatancy. *Computers and Geotechnics*, 9(1-2) :47-58, 1990.
- D. Aubry, H. Modaressi. Seismic wave propagation in soils including non-linear and pore pressure effects. In Davidovici editor, *Recent Advances in earthquake engineering and structural dynamics*, Ouets ed., p.209-224, 1992.

- D. Aubry, A. Modaressi. *GEFDyn, Manuel scientifique*, Ecole Centrale Paris, LMSS-Mat, 1996
- Y. Bamberger. *Mécanique de l'ingénieur – Tome 2*. Éditions Hermann, Paris, 1981.
- Y. Bamberger. *Mécanique de l'ingénieur – Tome 3 (ch. 4)*. Éditions Hermann, Paris, 1997.
- R. Bargellini. Evaluation technique de la méthode IMPL-EX d'Oliver. CR-AMA-09.029, 40 pages, 2009.
- JD Barnichon. Contribution of the bounding surface plasticity to the simulation of gallery excavation in plastic clays. *Engineering Geology*, 64 : 217-231, 2002.
- JL Batoz, G. Dhatt. Modélisation des structures par éléments finis. *Volume 1, Paris, Editions Hermès*, 455 pages, 1990.
- ZP Bažant. Mechanics of Distributed Cracking. *Applied Mechanics Review* 39(5) :675-705, 1986.
- ZP Bažant. Non-local damage theory based on micromechanics of crack interactions, *ASCE J. Engng Mech.*, 120(3) : 593-617, 1994.
- ZP Bažant et M. Jirásek. Nonlocal integral formulations of plasticity and damage : survey of progress. *J. Eng. Mech. ASCE*, 128 :1666-1692, 2002.
- T. Belytschko, J. Fish, BE Engleman. A finite element with embedded localization zones. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70 :59-89, 1988.
- A. Benallal, R. Billardon et G. Geymonat. Some mathematical aspects of damage softening rate problem. In J. Mazars and Z. Bažant editors, *Proc Cracking and Damage*, pages 247-258. Elsevier, 1988.
- A. Benallal, R. Billardon et G. Geymonat. Conditions de bifurcation à l'intérieur et aux frontières pour une classe de matériaux non standards. *C. R. Acad. Sci.*, 1989.
- A. Benallal, C. Comi. Localization analysis via a geometrical method. *Int. J. Solids Structures*, 33(1) :99-119, 1996.
- A. Benallal, C. Comi. Material instabilities in inelastic saturated porous media under dynamic loadings. *Int. J. Solids Struct.*, 39 :3693-3716, 2002.
- A. Benallal, C. Comi. Perturbation growth and localization in fluid-saturated inelastic porous media under quasi-static loadings. *J. Mech. Phys. Solids*, 51 : 851-899, 2003.
- J. Besson, G. Cailletaud, JL Chaboche, S. Forest. *Mécanique non linéaire des matériaux. Paris Hermès Science Publications*, 2001.
- J. Biarez, PY Hicher. Elementary mechanics of soil behaviour, saturated and remolded soils. *AA Balkema*, Amsterdam, Netherlands, 1994.

- D. Bigoni, T. Hueckel. Uniqueness and localization-I. Associative and nonassociative elastoplasticity. *Int. J. Solids Structures*, 28(2) :197-213, 1991.
- D. Bigoni, D. Zaccaria. Loss of strong ellipticity in non-associative elastoplasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, 40 :1313-1331, 1992a.
- D. Bigoni, D. Zaccaria. Strong ellipticity of comparison solids in elastoplasticity with volumetric non-associativity. *Int. J. Solids Struct.*, 29 :2123-2136, 1992b.
- D. Bigoni, H. Petryk. A note on divergence and flutter instabilities in elastic plastic materials. *Int. J. Solids Structures*, 39(4) :911-926, 2002.
- RI Borja, KM Sama, PF Sanz. On the numerical integration of three-invariant elastoplastic constitutive models. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg*, 31(1) :177-191, 2003.
- G. Borré, G. Maier. On linear versus non linear flow rules in strain localization analysis. *Meccanica*, 24 :36-41, 1989.
- D. Brancherie. *Modèles continus et discrets pour les problèmes de localisation et de rupture fragile et/ou ductile*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, 180 pages, 2003.
- D. Caillerie, R. Chambon. Existence and uniqueness for boundary value problems involving CloE model. *Localization and bifurcation theory for soils and rocks*. In Chambon R., Desrues J., Vardoulakis I. (Ed), A.A. Balkema, Rotterdam, pp.35-40, 1994.
- F. Calvetti, G. Combe, J. Lanier. Experimental micromechanical analysis of a 2D granular material: relation between structure evolution and loading path. *Mechanics of Cohesive Frictional Materials*, 2: 121-163, 1997.
- B. Cambou, P-Y Hicher. Modélisation élastoplastique des sols – 2. Chargements cycliques. Chapitre 4, *Elastoplasticité des sols et des roches, Modèles de comportement des sols et des roches 1*, P-Y Hicher et J-F Shao, Paris, Hermès Science Publications, 2002.
- R. Chambon. Bifurcation en bande de cisaillement, une approche avec des lois incrémentalement non linéaires, *J. Méc. Théor. Appl.*, 5(2) :277-298, 1986.
- R. Chambon, J. Desrues, W. Hammad et R.Charlier. CloE, a new rate-type constitutive model for Geomaterials theoretical basis and implementation. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomechanics*, 18 :253-278, 1994.
- R. Chambon, S. Crochepeyre. Daphnis a new model for the description of post-localization behaviour : Application to sands. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 3(2) :127-153, 1998.
- R. Chambon, D. Caillerie. Existence and uniqueness theorems for boundary value problems involving incrementally non-linear models. *Int. J. Solids Structures*, pages 5089-5099, 1999.

- R. Chambon, S. Crochepeyre, J. Desrues. Localization criteria for non-linear constitutive equations of geomaterials. *Mech. Cohes.-Frict. Mater.*, 5 :61-82, 2000.
- R. Chambon, D. Caillerie et T. Matsuchima. Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials : localization studies. *Int. J. Solids Struct.*, 38 :8503-8527, 2001.
- R. Chambon, J-C Moullet. Uniqueness studies in boundary value problems involving some second gradient models. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193 :2771-2796, 2004.
- R. Chambon. *Problèmes aux limites pour des modèles de comportement inélastique, le cas de la plasticité. Bifurcation et localisation. Spécificité des géomatériaux.* rapport interne, 2004a.
- R. Chambon. Some theoretical results about second order work, uniqueness, existence and controllability independent of the constitutive equation. *J. Eng. Math.*, 52 :53-61, 2004b.
- F. Collin, R. Chambon, R. Charlier. A finite element method for poro mechanical modelling of geotechnical problems using local second gradient models. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 65 :1749-1772, 2006.
- F. Collin, D. Caillerie, R. Chambon. Analytical solutions for the thick-walled cylinder problem modeled with an isotropic elastic second gradient constitutive equation. *Int. J. Solids Struct.*, 46 :3927-3937, 2009.
- C. Comi. A non-local model with tension and compression damage mechanisms. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 1 :1-22, 2001.
- MR Coop. The mechanics of uncemented carbonate sands. *Géotechnique*, 40(4) : 607-626, 1990.
- S. Coquillay. *Prise en compte de la non linéarité du comportement des sols soumis à de petites déformations pour le calcul des ouvrages géotechniques.* Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, LCPC, Paris, 2005.
- E. Cosserat et F. Cosserat. Théorie des corps déformables. *Librairie Scientifique A. Hermann et Fils*, Paris, 1909.
- S. Costa D'Aguiar. Numerical modelling of soil-pile axial load transfer mechanisms in granular soils. Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris (France) et Universidade Tecnica de Lisboa (Portugal), 339 pages, 2008.
- O. Coussy. *Poromechanics*. Ed. J. Wiley, 2004.
- YF Dafalias, EP Popov. A model of nonlinearity hardening materials for complex loading. *Acta Mechanica*, 21 : 173-192, 1975.
- YF Dafalias, EP Popov. Cyclic loading for materials with a vanishing elastic region. *Nuclear Engineering and Design*, 41(2) :293-302, 1977.

- YF Dafalias et LR Herrmann. Bounding surface formulation of soil plasticity. In : *Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads*, Wiley, New York, pp. 253-282, 1980.
- YF Dafalias. An anisotropic critical state clay plasticity model. In *C.S.Desai et al. Proc. Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications*, 1, p.513, 1987.
- F. Darve. Une loi rhéologique incrémentale non linéaire pour les solides. In *Mechanics Research Communications*, 7(4) : 205-212, 1980
- F. Darve, E. Flavigny et M. Megachou. Yield surfaces and principle of superposition revisited by incrementally non-linear constitutive relations. *Int. J. Plasticity*, 11(8):927-948, 1995.
- F. Darve, F. Laouafa. Plane strain instabilities in soil: application to slope stability. *Proc. Of VII Internat. Symp. On Num. Models in Geom.*, Pande, Pietruszczak, Schweiger (eds), Balkema, Rotterdam, pp.85-90, 1999.
- F. Darve, F. Laouafa. Instabilities in granular materials and applications to landslides. *Mech. Cohes. Fric. Mater.*, 5(8) :627-652, 2000.
- F. Darve, G. Servant, F. Laouafa, H. D. V. Khoa. Failure in geomaterials : Continuous and discrete analyses. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 193(28) :3057 :3085, 2004.
- F. Darve, C. Lambert. Continuous and Discrete Modelling of Failure in Geomechanics. In *Degradations and Instabilities in Geomaterials*, volume 461, CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, pages 197-234, 2004.
- R. de Borst, LJ Sluys. Localisation in a Cosserat continuum under static and dynamic loading conditions. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, 90 :805-827, 1991.
- R. de Borst et HB Mühlhaus. Gradient dependent plasticity : formulation and algorithmic aspects. *Int. J. Num. Engrg.*, 35 :521-540, 1992.
- R. de Borst, LJ Sluys, HB Mühlhaus et J. Pamin. Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engrg Computations*, 2(10) :99-121, 1993.
- CS Desai. A general basis for yield, failure and potential function plasticity. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geo.*, 4 : 361-375, 1980.
- CS Desai. Hierarchical single surface and the disturbed state constitutive models with emphasis on geotechnical applications. In *Saxena, K. R. Ed. Geotechnical Engineering : Emerging trends in design and practice*, New Delhi, Oxford & IBH Publishing Co., pp. 115-154, 1994.
- J. Desrues. La localisation de la déformation dans les matériaux granulaires. *Thèse ès Science*, U.S.M. et I.N.P. de Grenoble, 1984.
- J. Desrues, R. Chambon. Bifurcation par localisation de la déformation : Etude expérimentale et théorique à l'essai biaxial sur sable. In *Large Deformation of*



- Solids : Physical Basis and Mathematical Modelling*, pp. 433-459. Elsevier, Rotterdam, 1986.
- J. Desrues. Shear Band Initiation in Granular Materials : Experimentation and Theory. In *Geomaterials : Constitutive Equations and Modelling*, pp. 283-310. Elsevier, Rotterdam, 1990.
- J. Desrues, M. Mokni et F. Mazerolle. Tomodensitométrie et localisation dans les sables. *Proceedings, 10<sup>th</sup> ECSMFE, Florence*. Balkema, Rotterdam, 61-64, 1991.
- J. Desrues, R. Chambon, M. Mokni et F. Mazerolle. Void Ratio Evolution Inside Shear bands in Triaxial Sand Specimens Studied by Computed Tomography. *Géotechnique* 43(3) :529-546, 1996.
- J. Desrues, G. Viggiani. Strain localization in sand : an overview of the experimental results obtained in Grenoble using stereophotogrammetry. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geom.*, 28 : 279-321, 2004.
- D.C. Drucker. A definition of stable inelastic material. *J. Applied Mech.*, 26 :101-186, 1959.
- EN Dvorkin, AM Cuitiño et G. Gioia. Finite element with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *Int. J. Num. Meth. Engrg*, 30 :541-564, 1990.
- W. Ehlers, W. Volk. On theoretical and numerical methods in the theory of porous media based on polar and non-polar elasto-plastic solid materials. *Int. J. Solids Structures*, 34-35 : 4597-4617, 1998.
- N. El Hassan. *Modélisation théorique et numérique de la localisation de la déformation dans les géomatériaux*. Thèse de doctorat, Université UJF Grenoble, 1997.
- AC Eringen, DGB Edelen. On nonlocal Elasticity. *Int. J. Engng Sci.*, 10 :233-248, 1972.
- AC. Eringen. Theory of thermo-microstretch elastic solids. *Int. J. Engng Sci.*, 12 :1291-1301, 1990.
- HL Fang. A state dependent multi-mechanism for sand. *Géotechnique*, 53(4) : 407-420, 2003.
- R. Fernandes, C. Chavant, R. Chambon. A simplified second gradient model for dilatant materials : theory and numerical implementation. *Int. J. Solids Structures*, 45 :5289-5307, 2008.
- R. Fernandes. *Modélisation numérique objective des problèmes couplés hydromécaniques dans le cas des géomatériaux*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble I, 2009a.
- R. Fernandes, C. Chavant, R. Chambon. Computation of the borehole stability problem with a second gradient dilation model, à paraître 2009b.

- JA Fernandez Merodo. *Une approche à la modélisation des glissements et des effondrements de terrains : initiation et propagation*. Thèse de doctorat. Ecole Centrale Paris, 2001.
- S. Forest et E. Lorentz. Localization and regularization. In *Local Approach to fracture*, eds J.Besson, Presses de l'Ecole des Mines de Paris, 2004.
- S. Forest et R. Sievert. Nonlinear microstrain theories. *Int. J. Solids Structures*, 43 :7224-7245, 2006.
- CD Foster, RA Regueiro, AF Fossum, RI Borja. Implicit numerical integration of a three-invariant, isotropic/kinematic hardening cap plasticity model for geomaterials. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194 : 5109-5138, 2005.
- P. Germain. La méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. Première partie : théorie du second gradient. *Journal de Mécanique*, 12 :235-274, 1973a.
- P. Germain. The method of virtual power in continuum mechanics. Part 2 : Microstructure. *SIAM J. Appl. Math.*, 25 :556-575, 1973b.
- J. Ghaboussi et H. Momem. Plasticity model for cyclic behavior of sands. In : *HV Phan, CS Desai, S. Sture, JV Perumpral Eds. Proc. Of the 3<sup>rd</sup> Int Conf. On Num. Meth. Geomechanics*, Aachen, Rotterdam : Balkema, pp. 423-433, 1979.
- J. Ghaboussi et H. Momem. Modelling and Analysis of cyclic behaviour of sands. *Soil Mechanics – Transient and Cyclic Loads*, eds. GN Pande & OC Zienkiewicz, John Wiley & Sons Ltd, pp. 313-342, 1982.
- R-J Gibert. Vibrations des structures. *Collection de la direction des études et recherches d'Electricité de France*, éd. Eyrolles, 1988
- V. Godard. *Modélisation de l'endommagement anisotrope du béton avec prise en compte de l'effet unilatéral : Application à la simulation des enceintes de confinement nucléaires*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2005.
- J. Hadamard. *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*. Hermann A., Paris, 1903.
- S. Hall, DM Wood, E. Ibraim. Localised deformation patterning in 2D granular materials revealed by digital correlation. *Granular Matter*, 12 :1-14, 2010.
- K. Hamadi. *Modélisation des bifurcations et des instabilités dans les géomatériaux*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2006.
- W. Hammad. *Modélisation non linéaire et étude expérimentale des bandes de cisaillement dans les sables*. Thèse de Doctorat, UJF, Grenoble, France, 1991.
- K. Hashiguchi. Two- and three-surface models of plasticity. *Proc. of 5<sup>th</sup> Int. Conf. on Num. Meth. In Geomechanics*, Nagoya, pp. 285-292, 1985.

- KW Hau. *Application of a three-surface kinematic hardening model to repeated loading of thinly surfaced pavements*. Thèse de doctorat, Université de Nottingham, United Kingdom, 2003.
- R. Hill. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 6 :236-264, 1958.
- R. Hill. Acceleration waves in solids. *J. Mech. Phys. Solids*, 10 :1-16, 1962.
- R. Hill, JW Hutchinson. Bifurcation phenomena in the plane tension test. *J. Mech. Phys. Solids*, 23 :239-264, 1975.
- R. Hill. Aspect of invariance in solids. In *Advances in Applied Mechanics*, 18 :1-75, New York, Academic Press, 1978.
- J. Huang, DV Griffiths. Return Mapping Algorithms and Stress Predictors for Failure Analysis in Geomechanics. *J. of Engineering Mechanics*, 135(4) : 276-284, 2009.
- T. Hueckel, G. Maier. Incremental boundary value problems in the presence of coupling of elastic and plastic deformations : a rock mechanics oriented theory. *Int. J. Solids. Structures*, 13 :1-15, 1977.
- TJR Hughes. Numerical Implementation of constitutive models : rate-independent deviatoric plasticity. IN : S. Nemat-Nasser, RJ Asaro and GA Hegeimer, Editors, *Theoretical Foundation for Large Scale Computations for Nonlinear Material Behavior*, Martinus Nijhoff Publishers, 1983.
- JC Hujeux. *Calcul numérique de problèmes de consolidation élastoplastiques*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, 1979.
- JC. Hujeux. Une loi de comportement pour le chargement cyclique des sols. In : V. Davidovici, Editor, *Génie Parasismique*, Presses ENPC, France, pp. 278-302, 1985.
- S. Imposimato, R. Nova. On value of the second order work in homogeneous test on loose sand specimens. In Muhlhaus et al. Editor, *Bifurcation and Localisation Theory in Geomechanics*, pages 209-216, Zwets and Zeitlinger, 2001.
- DW Iwan. On a class of models for the yielding behaviour of continuous and composite systems. *J. Appl. Mech.*, ASME, 34 : 612-617, 1967.
- CP Jeannerod. *Formes normales de perturbations de matrices : étude et calcul exact*. Thèse de doctorat, INPG, 2000.
- O. Jenck. *Le renforcement des sols compressibles par inclusions rigides verticales. Modélisation physique et numérique*. Thèse de doctorat, INSA Lyon, 2005.
- B. Jeremić. Line search techniques for elasto-plastic finite element computations in geomechanics. *Commun. Numer. Methods Eng.*, 17(2) :115-125, 2001.
- B. Jeremić, Z. Yang, Z. Cheng, G. Jie, K. Sett, M. Taeibat, M. Preisig, N. Tafazzoli.

- Lecture Notes on Computational Geomechanics : Inelastic Finite Elements for Pressure Sensitive Materials.* Dept. Civil and Env. Engrg, Université de Californie, Davis, 2009.
- M. Jirásek. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 188 :307-330, 2000.
- M. Jirásek. *Basic concepts and equations of solids mechanics.* « Damage and Fracture in geomaterials », Alert Doctoral School, Aussois, France, 2007.
- VN Kaliakin et YF Dafalias. Theoretical aspects of the elastoplastic-viscoplastic bounding surface model for cohesive soils. *Soils and Foundations*, 30(3) :11-24, 1990.
- A. Kattan. *Fluage et consolidation des sols saturés et quasi-saturés.* Analyse Numérique. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1990.
- M. Kham. Projet CODHYBAR2 : Méthodologie de modélisation numérique de la construction par couches et la mise en eau d'une digue en terre avec la loi élasto-plastique de Hujieux. *Note interne EDF R&D, HT62-2009-03-211FR*, 2009.
- AR Khoei, AR Azami et SM Haeri. Implementation of plasticity based models in dynamic analysis of earth and rockfill dams : A comparison of Pastor-Zienkiewicz and cap-models. *Comput. Geotechnics*, 31 : 385-410, 2004.
- M. Klisinski, K. Runesson et S. Sture. Finite element with inner softening band. *J. Eng. Mech.*, 117(3) :575-587, 1991.
- J. Koiter. General theorems for elastoplastic solids. *Progress in Solid Mechanics*, North-Holland Pub., 1 : 165-221, 1960.
- D. Kolymbas. An outline of hypoplasticity. *Archive of Applied Mechanics*, 61 :143-151, 1991.
- M. Kordjani. Caractérisation et modélisation du comportement en petites déformations des sols sur des chemins de sollicitation monotone et cyclique. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, Châtenay-Malabry, France, 1995.
- RD Krieg, DB Krieg. Accuracies of numerical solution methods for the elastic-perfectly plastic model. *ASME J. Pressure Vessel Technol.*, 99(4) :510-515, 1977.
- E. Kröner. Elasticity Theory of Materials with Longrange Cohesive Forces. *Int. J. Solids Struct.*, 3 :731-742, 1968.
- JA Krumhansl. Some considerations of the relations between solid state physics and generalized continuum mechanics. In E. Kroner, editor, *Mechanics of Generalized Continua*, pages 298-311, Berlin, 1968. Springer Verlag.
- IA Kunin. The theory of Elastic Media with Microstructure and the Theory of Dislocations. *Mechanics of Generalized Continua*, ed. E.Kröner, Springer-

- Verlag, Heidelberg, Germany, pages 321-328, 1968.
- PV Lade. Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surface. *Int. J. Solids Struct.*, 13(7) : 1019-1035, 1977.
- L. Laloui. *Modélisation du comportement thermo-hydro-mécanique des milieux poreux anélastiques*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 1995.
- RK Larrson, K. Runesson et NS Ottosson. Discontinuous displacement approximation for capturing plastic localization. *Int. J. Num. Mech. Engng*, 36 :2087-2105, 1993.
- J. Laverne. *Formulation énergétique de la rupture par des modèles de forces cohésives : considérations théoriques et implantations numériques*. Thèse de doctorat, Université Paris 13, 2004.
- YL Lee. *Prise en compte des non linéarités de comportement des sols et des roches dans la modélisation du creusement d'un tunnel*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 1994.
- I. Lepidas et JP Magnan. *Fluage et consolidation des sols argileux : modélisation numérique*. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Rapport de Recherche LPC n°157, 1990.
- Y. Leroy, A. Needleman et M. Ortiz. An overview of finite element methods for the analysis of strain localization. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 61 :189-214, 1987.
- F. Lopez-Caballero. *Influence du comportement non linéaire du sol sur les mouvements sismiques induits dans des géo-structures*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 2003a.
- F. Lopez-Caballero, A. Modaressi, F. Elmi. Identification of an elasto-plastic model parameters using laboratory and in situ tests. In Di Benedetto et al., editor, *Deformation Characteristics of Geomaterials IS Lyon*, pp. 1183-1190. Balkema, 2003b.
- F. Lopez-Caballero, A. Modaressi Farahmand-Razavi. *Tests de construction par couches d'un sol bi-phasique saturé*. <http://www.mssmat.ecp.fr/Tests-de-construction-par-couches,2291>, 2006a.
- F. Lopez-Caballero, A. Modaressi Farahmand-Razavi. *Tests de propagation des ondes 1D*. <http://www.mssmat.ecp.fr/Tests-de-propagation-des-ondes-1D,2470>, 2006b.
- F. Lopez-Caballero, A. Modaressi Farahmand-Razavi, H. Modaressi. Non linear numerical method for earthquake site response analysis I- elastoplastic cyclic model & parameter identification strategy. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 5(3) :303-323, 2007.
- E. Lorentz. *Modélisations opérationnelles de l'endommagement*. HI-74/96/012/0, note interne EDF R&D, 1996.

- E. Lorentz. *Lois de comportement à gradients de variables internes : Construction, formulation variationnelle et mise en œuvre numérique*. Thèse de doctorat, ENS Cachan, 1999.
- E. Lorentz, P. Badel. A new path-following constraint for strain-softening finite element simulations. *Int. J. Num. Meth. Engrg*, 60 :499-526, 2004.
- E. Lorentz, A. Benallal. Gradient constitutive relations : numerical aspects and application to gradient damage. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 194 :5191-5220, 2005.
- E. Lorentz. *Modélisation et simulation numérique de l'endommagement des structures*. Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris 6, 2008.
- B. Loret et J. Prévost. Dynamic strain localization in elasto-(visco)-plastic solids. I- General formulation and one-dimensional example. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg*, 83 :247-273, 1990.
- MP Luong. Phénomènes cycliques dans les sols pulvérulents. *Revue Française de Génie Géotechnique*, 10(1) : 39-53, 1980.
- AM Lyapunov. Problème général de la stabilité des mouvements. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse*, 9 :203-274, 1907. Traduit en français du texte original, Kharkov, 1892.
- G. Maier. A minimum principle for incremental elastoplasticity with non-associated flow laws. *J. Mech. Phys. Solids*, 18(5):319-330, 1970
- G. Maier, T. Hueckel. Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 16 :77-92, 1979.
- M. Maleki. *Modélisation hiérarchisée du comportement des sols*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 1998.
- J. Mandel. Conditions de stabilité et postulat de Drucker. *Proceedings of IUATM Symposium on Rheology and Soil Mechanics*, 58-68, 1964.
- J. Mandel. Généralisation de la théorie de la plasticité de W.T. Koiter. *Int. J. Solids Struct.*, 1 : 273-295, 1965.
- MT Manzari et YF Dafalias. A critical state two-surface plasticity model for sands. *Géotechnique*, 47(2) : 255-272, 1997.
- MT Manzari, MA Nour. On implicit integration of bounding surface plasticity models. *Computer and Structures*, 63(3) :385-395, 1997.
- MT Manzari, R. Prachathananukit. On integration of a cyclic soil plasticity model. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 25 :525-549, 2001.
- T. Matsushima, R. Chambon, D. Caillerie. Large strain finite element analysis of local second gradient models, application to localization. *Int. J. Num. Meth. Engrg*, 54 :499-521, 2002.

- P. Mestat. Modélisation élastoplastique des sols – 1. Chargements monotones. Chapitre 3, *Elastoplasticité des sols et des roches, Modèles de comportement des sols et des roches 1*, P-Y Hicher et J-F Shao, Paris, Hermès Science Publications, 2002.
- RD Mindlin. Microstructure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16 :51-78, 1964.
- RD Mindlin. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *Int. J. Solids Structures*, 1 :417-738, 1965.
- A. Modaressi, H. Modaressi. Thermoplastic constitutive model for unsaturated soils ; Validation on a silty material. *Proceedings of Numerical Models in Geomechanics, NUMOG V*, vol. 1, Rotterdam, Balkema, p. 45-50, 1995
- A. Modaressi, S. Boufellouh, P. Evesque. Modeling of stress distribution in granular piles : Comparison with centrifuge experiments. *Chaos*, vol. 9(3) :523-543, 1999.
- A. Modaressi. Modélisation des milieux poreux sous chargements complexes. Dossier d'Habilitation à Diriger des Recherches, INPG, 2003.
- H. Modaressi. *Modélisation numérique de la propagation des ondes dans les milieux poreux anélastiques*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, France, 1987.
- H. Modaressi, D. Aubry. Numerical modelling for the flow of compressible fluids in systems of deformable rocks. *Proceedings of Numerical Models in Geomechanics, NUMOG III*, Niagara Falls, n°391-398, London and New York, Elsevier Applied Science, 1989.
- H. Modaressi, L. Laloui, D. Aubry. Thermodynamical approach for Camclay-family models wit Roscoe type dilatanct rules. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geom.*, 18 : 133-138, 1994.
- H. Modaressi, L. Laloui. A thermoviscoplastic constitutive model for clays. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geom.*, 21 : 313-335, 1997.
- M. Mokni. *Relations entre déformations en masse et déformations localisées dans les matériaux granulaires*. Thèse de doctorat, UJF, Grenoble, France, 1992.
- FJ Montáns, RI Borja. Implicit  $J_2$ -bounding surface plasticity using Prager's translation rule. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 55 :1129-1166, 2002.
- A. Mouratidis et JP Magnan. Modèle élastoplastique anisotrope avec écrouissage pour le calcul des ouvrages sur sols compressibles. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, Paris, Rapport de recherche LPC, n°121, 1983.
- JJ Moreau. On unilateral constraints, friction and plasticity. *New variational techniques in mathematical physics* (Centro Internaz. Mat. Estivo (C.I.M.E.), II Ciclo, Bressanone, 1973), pp. 171-322, Ed. Cremonese, Rome, 1974.
- Z. Mróz. Non associated flow laws in plasticity. *Journal de Mécanique*, 2(1) :21-42,

- 1963.
- Z. Mróz. On the description of anisotropic hardening. *J. Mech. Phys. Solids*, 15 : 163-175, 1967.
- Z. Mróz, VA Norris et OC Zienkiewicz. Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils. *Géotechnique*, 29(1) : 1-37, 1979.
- HB Mühlhaus, I. Vardoulakis. The thickness of shear band in granular materials. *Géotechnique*, 37 :271-283, 1987.
- HB Mühlhaus et EC Aifantis. A variational principle for gradient plasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 28 :845-857, 1991.
- A. Needleman et V. Tvergaard. Finite Element Analysis of Localisation in Plasticity. In J. Oden and G. Carey (Eds), *Finite Elements – Special Problems in Solids Mechanics*, Volume V, pp.94-157. Prentice Hall Inc, 1984.
- A. Needleman. Material rate dependence and mesh sensitivity in localization problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg*, 67 :69-85, 1988.
- MK Neilsen, HL Schreyer. Bifurcations in elastic-plastic materials. *Int. J. Solids Struct.*, 30 :521-544, 1993.
- Q.S. Nguyen. Stabilité et Mécanique et non linéaire. *Hermès* 2000.
- A. Niemunis. *Extended hypoplastic models for soils*. Habilitation Dissertation, Bochum, 2002.
- F. Nicot. Private communication, 2008.
- F. Nicot, F. Darve. A multi-scale approach to granular materials. *Mechanics of Material*, 37 :980-1006, 2005.
- R. Nova. A model of soil behaviour in plastic and hysteretic ranges. *Int. Workshop on Constitutive Behaviour of soils*, Grenoble, eds Balkema, pp.289-309, 1982.
- R. Nova. Controllability of the incremental response of soil specimens subjected to arbitrary loading programmes. *J. Mech. Behav. Mater.*, 5(2) :193-201, 1994.
- R. Nova. The role of non-normality in soil mechanics and some of its mathematical consequences. *Comput. Geotech.*, 31 :185-191, 2004.
- J. Oliver, AE Huespe, JC Cante. An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 197 : 1865-1889, 2008.
- M. Ortiz, EP Popov. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Numer. Meth. Engrg*, 21(9) :1561-1576, 1985.
- M. Ortiz, JC Simo. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 23 :353-366,



1986.

- M. Ortiz, Y. Leroy et A. Needleman. A finite element method for localized failure analysis. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 61 :189-214, 1987.
- A. Ostrowski, O. Taussky. On the variation of the determinant of a positive definite matrix. *Indagationes Math.*, A54 :383-385, 1951
- N.S. Ottosen, K. Runesson. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 27(4) :401-421, 1991a.
- NS Ottosen, K. Runesson. Discontinuous bifurcations in a non-associated Mohr material. *Mech. Mater.*, 12(3-4) :255-265, 1991b.
- M. Pastor, OC Zienkiewicz et KH Leung. Simple model for transient soil loading in earthquake analysis : II. Non associative models for sands. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 9 :477-498, 1985.
- M. Pastor, OC Zienkiewicz. A generalized plasticity hierarchical model for sand under monotonic and cyclic loading. *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Conf. On Numerical Models in Geomechanics*, Ghent (Belgique), 31 Mars-4 Avril, GN Pande et WF Van Impe (eds), M. Jackson and Son Pub., pp. 131-150, 1986.
- M. Pastor, OC Zienkiewicz et AHC Chan. A generalized plasticity continuous loading model for geomaterials. In *Proc. Int. Conf. Num. Meth. In Engineering, Theory and Application*, NUMETA '87, Swansea, G.N. Pande et J. Middleton (eds), Martinus Nighoff Pub., pp. C31/1-10, 1987.
- M. Pastor, OC Zienkiewicz et AHC Chan. Generalized plasticity modelling soil behaviour. *Int. J. Num. Anal. Meth. In Geomech.*, 14(3) :151-190, 1990.
- G. Perrin, J. B. Leblond. Rudnicki and Rice's analysis of strain localization revisited. *J. Appl. Mech.*, 60(4) :842-846, 1993.
- RHJ Peerlings, R. De Borst, WAM Brekelmans et JHP de Vree. Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 39 :3391-3403, 1996.
- RHJ Peerlings, MGD Geers, R. De Borst et WAM Brekelmans. A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *Int. J. Solids Struct.*, 38 :7723-7746, 2001.
- H. Petryk. *Theory of material instability in incrementally non-linear plasticity*. CISM Material instabilities in elastic and plastic solids, Petryk ed., 414 :261-331, Springer, 1999.
- E. Piccuezzu. Lois de comportement en géomécanique. Modélisation, mise en oeuvre, identification. Thèse de Doctorat. Ecole Centrale Paris, Laboratoire MSSMat, 170pages, 1991.
- S. Pietruszack et Z. Mróz. Finite element analysis of deformation of strain softening materials. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 17 :327-334, 1981.

- G. Pijaudier-Cabot et Z. Bažant. Nonlocal Damage Theory. *J. Engng Mech.*, ASCE, 113(10) :1512-1533, 1987.
- EB Pitman. Visco-plastic relaxation : convergence and localization. *Eur. J. Mech., A/ Solids*, 14(6) :961-979, 1995.
- J. Planas, M. Elices, GV Guinea. Cohesive cracks as a solution of a class of nonlocal models. *Fracture Damage Quasibrittle Structure*, ISBN 0-419-192808, 1994.
- D. Pradel, K. Ishihara, M. Gutierrez. Yielding and flow of sand under principal stress axes rotation. *Soils and Foundations*, 30(1) : 87-99, 1990.
- JH Prévost. Mathematical modelling of monotonic and cyclic undrained clay behaviour. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomechanics*, 1 : 195-216, 1977.
- JH Prévost. Anisotropic undrained stress-strain behaviour of clays. *J. Geotech. Engrg Division*, ASCE, 104 : 1075-1090, 1978.
- JH Prévost et B. Loret. Dynamic strain localization in elasto-(visco)-plastic solids. II- Plane strain examples. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 83 :275-294, 1990.
- JH Prévost et CM Keane. Multimechanism elasto-plastic model for soils. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 116(9) :1924-1944, 1990.
- F. Prunier. *Modélisation des instabilités en géomécanique, application aux glissement de terrains*. Thèse de doctorat, INPG, Laboratoire Sols, Solides, Structures – Risques, 2008.
- [R5.01.01]. *Solveurs modaux et résolution du problème généralisé (GEP)*. Documentation version 10, Code\_Aster, [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org)
- [R3.03.01]. *Dualisation des conditions aux limites*. Documentation version 10, Code\_Aster, [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org)
- [R5.03.01] *Algorithme non linéaire quasi-statique (opérateur STAT\_NON\_LINE)*. Documentation version 10, Code\_Aster, [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org)
- [R5.03.80] *Méthodes de pilotage du chargement*. Documentation version 10, Code\_Aster, [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org)
- [R5.04.01]. *Modélisation non locale à gradient de variables internes*. Documentation version 10, Code\_Aster, [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org).
- [R5.04.02]. *Modélisation non locale à gradient de déformation*. Documentation version 10, Code\_Aster, [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org)
- [R5.04.03]. *Modélisation second gradient*. Documentation version 10, Code\_Aster, [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org)
- [R7.01.14]. *Loi de comportement CAM-CLAY*. Documentation version 10, Code\_Aster, [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org)

- [R7.01.23]. *Loi de comportement cyclique de Hujeux pour les sols*. Documentation version 10, Code\_Aster, [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org)
- B. Raniecki. Uniqueness criteria in solids with non-associated plastic flow laws at finite deformations. *Bull. Acad. Polon. Sci.*, XXVII, 391-399, 1979.
- B. Raniecki, OT Bruhns. Bounds to bifurcation stresses in solids with non-associated plastic flow law at finite strain. *J. Mech. Phys. Solids*, 29:153-171, 1981.
- R. Regueiro, T. Lai, R. Borja. Computational Modeling of Strain Localization in Soft Rock. In *Evangelista and Picarelli(Eds.), The Geotechnics of Hard Soils – Soft Rocks*, Balkema, Rotterdam, pages 789-797, 1998.
- JR Rice. The localization of plastic deformation. *Theoretical and applied mechanics*, W.T. Koiter ed., North-Holland publishing Company(8) :207-220, 1976.
- JR Rice. *The localization of plastic deformation*. Koiter, W.T. (Ed.), Theoretical and Applied Mechanics. North-Holland, Amsterdam, pp. 207-220, 1977.
- JR Rice, JW Rudnicki. A note on features of the theory of the localization of deformation. *-Int. J. Solids Structures*, 16(2) :597-605, 1980.
- E. Rizzy, G. Maier, K. William. On failure indicators in multidissipative materials. *Int. J. Solids Struct.*, 33 :3187-3214, 1996.
- M. Rouainia, D. Muir Wood. Implicit numerical integration for a kinematic hardening soil plasticity model. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 25 :1305-1325, 2001.
- KH Roscoe, AN Schofield, CP Wroth. On the yielding of soils. *Géotechnique*, 8(1) : 22-53, 1958.
- KH Roscoe et JB Burland. On the generalised stress-strain behaviour of 'wet' clay. In *Engineering Plasticity*, eds. J. Heyman & FA Leckie, pp.535-609, 1968.
- KH Roscoe. The influence of strains in soil mechanics. *Géotechnique*, 20 :129-170, 1970.
- M. Roseau. *Vibrations des systèmes mécaniques, Méthodes analytiques et applications*. Editeur Masson, 488 pages, 1984.
- J. Rosenberg, R. Cimrman. Microcontinuum approach in biomechanical modeling. *Mathematics and Computers in Simulation*, 61 :249-260, 2003.
- PW Rowe. The stress dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. In *Proc. Roy. Soc. London A269*, London, pp. 500-527, 1962.
- JW Rudnicki, J.R. Rice. Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 23 :371-394, 1975.
- K. Runesson, NS Ottosen, D. Peric. Discontinuous bifurcations of elastic plastic solutions in plane stress and plane strain. *Int. J. Plasticity*, 7 :99-121, 1991.

- G. Scarpelli et DM Wood. Experimental observations of shear band patterns in direct shear tests. *Deformation and Failure of Granular Materials*, Balkema, 473-484, 1982.
- G. Servant, F. Darve, J. Desrues and IO Georgopoulos. Diffuse modes of failure in geomaterials. In DiBenedetto, editor, *Deformation characteristics of Geomaterials IS Lyon*, pages 1183-1190, France, Balkema, 2003.
- Y. Sieffert, S. Al Holo, R. Chambon. Loss of uniqueness of numerical solutions of the borehole problem modelled with enhanced media. *Int. J. Solids Struct.*, 46 :3173-3197, 2009.
- JC Simo, M. Ortiz. A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis Based on the Use of Hyperelastic Constitutive Equations. *CNAME*, 49(2):221-245, 1985.
- JC Simo, RL Taylor. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg*, 48 :101-118, 1985.
- JC Simo. Strain softening and dissipation : a unification of approaches. In Bažant & Mazars, *Cracking and Damage*, Elsevier applied science, pages 440-461, 1988
- JC Simo, JG Kennedy et S. Govindje. Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms. *Int. J. Num. Meth. Engrg*, 26 :2161-2185, 1988.
- JC Simo, J. Oliver et F. Armero. An analysis of strong discontinuity induced by strain softening solutions in rate-independent solids. *J. Comput. Mech.*, 12 :277-296, 1993.
- JC Simo, TJR Hughes. Computational inelasticity. Interdisciplinary Applied Mathematics, Mechanics and Materials, v7, Springer Verlag New York Inc., 412 pages, 2000.
- LJ Sluys, R. De Borst, HB Mühlhaus. Wave propagation, localization and dispersion in a gradient-dependent medium. *Int. J. Solids Struct.*, 30 : 1153-1171, 1993.
- LJ Sluys. Discontinuous modelling of shear banding. In D.R.J. Owen, E. Oñate et E. Hinton, editors, *Computational plasticity V. Fundamentals and Applications*, pages 957-964, Barcelona, 1997.
- SE Stallebrass. *The effect of recent stress history on the deformation of overconsolidated soils*. Thèse de doctorat, Université de City, United Kingdom, 1990.
- L. Strömberg et M. Ristinmaa. FE-formulation of a nonlocal plasticity theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng*, 136 :127-144, 1996.
- L. Szabó. Shear band formulations in finite strain elastoplasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 31 :1291-1308, 1994.

- L. Szabó. On the eigenvalues of the fourth-order constitutive tensor and loss of strong ellipticity in elastoplasticity. *Int. J. Plasticity*, 13 :809 :835, 1997.
- L. Szabó. Comments on loss of strong ellipticity in elastoplasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 37 :3775-3806, 1999.
- C. Tamagnini, G. Viggiani, R. Chambon et J. Desrues. Evaluation of different strategies for the integration of hypoplastic constitutive equations : Application to the CloE model. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 5(4) :263-289, 2000.
- TY Thomas. Plastic flow and fracture in solids. In *Academic Press*, New York, 1961.
- RA Toupin. Elastic materials with couple-stress. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 11 :385-414, 1962.
- C. Truesdell, W. Noll. The non linear fields theory of mechanics. *Encyclopaedia of Physics*, Springer-Verlag, 1965.
- I. Vardoulakis. Berechnungsverfahren für erdkörper mit plastischer ver- und entfestigung, entsehung, und ausbreitung von sherfungen. *DFG, report GU*, 103/16, 1974.
- I. Vardoulakis, M. Goldsheider, G. Gudehus. Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geom.*, 2(2) :99-128, 1978.
- I. Vardoulakis. Bifurcation Analysis of the Triaxial Test in Sand Samples. In *Acta Mechanica*, Volume 32, pp 35-54, 1979.
- I. Vardoulakis. Shear Band Inclination and Shear Modulus of Sand in Biaxial Test. *Int. J. Num. Anal. Meth. in Geomechanics*, 4 : 3-119, 1980.
- I. Vardoulakis et J. Sulem. *Bifurcation Analysis in Geomechanics*. London : Blackie, 1995.
- KC Vossoughi. *Étude Numérique du comportement des ouvrages de soutènement à la rupture*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, Laboratoire Mécanique des Sols, Structures et Matériaux, 2001.
- GW Wathugala, S. Pal. Comparison of different implementation algorithms for HiSS constitutive models in FEM. *Int. J. Solids and Struct.*, 36 :4941-4962, 1999.
- HS Yu. A unified critical state model for clay and sand. *Civil Engineering Research Report n°112.08.1995*, Université de Newcastle, NSW 2308, Australie, 1995.
- HS Yu. CASM : a unified state parameter model for clay and sand. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomechanics*, 22 : 621-653, 1998.
- HS Yu, C. Khong et J. Wang. A unified plasticity model for cyclic behaviour of clay and sand. *Mechanics Research Communications*, 34 : 97-114, 2007.
- OC Zienkiewicz, CT chng, P. Bettles. Drained, undrained, consolidating dynamic

---

behaviour assumptions in soils. *Geotechnique*, 30 : 385-395, 1980.

OC Zienkiewicz, Z. Mróz. Generalized plasticity formulation and applications to geomechanics. *Mechanics of Engineering Materials*, CS Desai et RH Gallagher (eds), Wiley, Ch. 33, pp. 655-679, 1984.

OC Zienkiewicz, RL Taylor et JZ Zhu. The finite element method : Its Basis and Fundamentals. *Butterworth-Heinemann*, 6ème édition, 2005.